**CONTRÔLE TERMINAL DE
MÉTHODES ANALYTIQUES POUR LA PHYSIQUE**
2^{ème} session
Vendredi 3 juillet 2009, 8h00 - 10h00, durée : 2 heures

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Les téléphones portables doivent être éteints et ne pas figurer sur la table. Le sujet comporte **deux** pages. Les quatre exercices sont indépendants.

EXERCICE 1

On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) La matrice M possède une propriété permettant de déduire sans calcul qu'elle est diagonalisable. Quelle est cette propriété et que peut-on en déduire pour le produit scalaire entre deux vecteurs propres associés à différentes valeurs propres ?
- 2) Déterminer les valeurs propres de M .
- 3) Déterminer les sous-espaces propres de M . Vérifier la propriété pour les vecteurs propres trouvée dans la question 1).
- 4) On note P la matrice exprimant les vecteurs propres dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner une des expressions possibles de P et en calculer l'inverse. *Astuce* : Le calcul de l'inverse de P peut être simplifié en calculant d'abord $P^T P$ ou P^T est la matrice transposée de P .
Donner la matrice diagonale D associée à l'expression choisie ci-dessus pour P . Quelle relation existe-t-il entre M et D ? Comment appelle-t-on ce genre de relation ?
- 5) En utilisant la question 4), donner l'expression de M^n en fonction de P et D pour n entier naturel quelconque (on n'effectuera pas le calcul matriciel pour avoir M^n uniquement en fonction de n).

EXERCICE 2 [*questions indépendantes*]

- 1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappeler l'expression du déterminant de A obtenue en développant par rapport à une ligne (ou une colonne) de A , en définissant la(les) notation(s) importante(s) dans ce développement.
- 2) Déterminer le réel t tel que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = -10.$$

- 3) Soit a, b et c trois scalaires quelconques. Calculer le déterminant Δ défini ci-dessous et l'écrire sous forme factorisée.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

- 4) Soit D_n le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{ii} = 0$, $A_{ij} = 1$ si $i < j$ et $A_{ij} = -1$ si $i > j$ pour $i, j = 1, \dots, n$.
- Calculer D_1 et D_2 .
 - Établir la relation de récurrence $D_n = D_{n-2}$. On pourra commencer par ajouter la n ème colonne à la première.
 - En déduire l'expression de D_n en fonction de n .

EXERCICE 3

Soit $V \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$\psi''(x) + \frac{3}{x}\psi'(x) + \frac{1}{x^2}\psi(x) = 0. \quad (1)$$

- Chercher une première solution de Eq.(1) sous la forme d'une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$.
- Rappeler sans démonstration, l'équation différentielle vérifiée par le Wronskien W de Eq. (1) et la résoudre avec la condition initiale $W(1) = 1$.
- A l'aide du Wronskien déterminé en 2), trouver une deuxième solution de Eq.(1).
- Déduire des questions 1) et 3) l'expression de la solution générale de Eq.(1).

EXERCICE 4 [questions indépendantes]

- 1) Étudier la convergence ou non des séries de terme général u_n dans les cas suivants (on justifiera la réponse et on ne calculera pas la série en cas de convergence) :

$$u_n = \frac{e^{in\pi/3}}{n\sqrt{n}}, \quad u_n = (n+17)^{-9/10}, \quad u_n = n^{10} \left(\frac{79}{81}\right)^n.$$

- 2) Donner une formule et les éventuelles conditions d'application de cette formule pour le calcul du rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique quelconque et n_0 un entier naturel quelconque.
- 3) Rappeler le développement en série entière et le rayon de convergence de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$.
En déduire la convergence ou non des séries numériques suivantes et calculer leur valeur dans le cas où cela converge :

$$s_a = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\sqrt{e})^n}{n}, \quad s_b = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln 5)^n}{n!}, \quad s_c = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{3^n}.$$

(ici : $e = 2.71828\dots$ est le nombre d'Euler).