UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - LICENCE DE PHYSIQUE
Deuxième année

Mécanique et Applications à l'Astrophysique

Examen: 1 Juillet 2008. Durée: 1:30h

Aucun document est autorisé.
Toutes les calculettes sans possibilité de communication sont permises.

On rappelle que les correcteurs sont sensibles à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel, en aucun cas, ne devra être télégraphique. En outre, conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras.

A. Question de cours

Aucune démonstration n'est demandée pour les questions de cours. Par contre, veillez à expliquer la signification de chaque quantité introduite.

1. Écrire les deux équations du principe fondamental de la dynamique qui gouvernent le mouvement d'un solide indéformable.

2. Comment s'écrit la loi fondamentale de la dynamique d'un système ouvert qui peut échanger de la matière avec son environnement ?

B. Problème: I. Balance en forme d'un arc circulaire

Une balance de masse M et centre de masse C_A est constituée d'un arc circulaire de rayon R et d'angle d'ouverture γ (voir fig. 1a). On prendra l'arc comme un objet uni–dimensionnel, et on négligera la masse des suspensions. Dans toute la partie B on considère tous les systèmes sous l'influence de l'accéleration de la pesanteur $\mathbf{g}$ dans la direction $-\hat{\mathbf{e}}_z$. Les parties B.I et B.II sont indépendantes.

1. Calculer la position du centre de masse de l'arc par rapport à celui-ci. (*Indication:* Montrer que $OC_A = l$ avec $l = Rf(\gamma)$, où on précisera la fonction $f(\gamma)$).

2. Calculer le moment d'inertie $I_{O\Delta}$ de l'arc par rapport à l'axe $\Delta = Oy$ perpendiculaire au plan de dessin passant par l'origine O.

3. Pour une orientation générale de l'arc repérée par l'angle θ (voir fig.1b), calculer le moment du poids de l'arc en O.

4. En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation de mouvement pour l'angle θ.

5. Établir la fréquence des oscillations de faible amplitude.

6. Montrer que pour $\gamma \to 0$, on retrouve la fréquence habituelle d'une pendule de longueur R.

B. Problème: II. Disque roulant sans glissement dans la balance fixe

On arrête maintenant la balance et on met un disque circulaire plein et uniforme (masse m, rayon r, centre de masse C_D) dans l'arc, tel que le disque peut *rouler sans glissement et sans frottement* dans l'arc fixe. La position du centre de masse du disque est repérée par l'angle β, l'orientation du disque par l'angle φ (voir fig.1c)

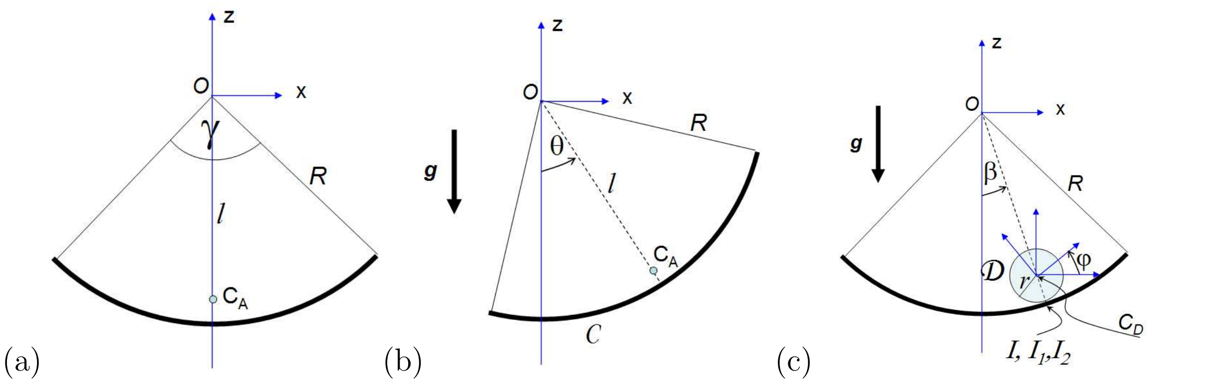

Figure 1: (a) Arc avec centre de masse C_A, (b) arc comme balance, et (c) comme guide circulaire fixe pour un disque $\mathcal{D}$

1. Calculer le moment d'inertie $I_{C_D y}$ du disque par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan qui passe par son centre C_D.

2. En déduire le moment cinétique $\mathbf{L}_{C_D/R^*}$ du disque en son centre de masse C_D dans le référentiel R^* de son centre de masse.

3. Écrire la condition de roulement sans glissement, et en déduire la relation entre $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$.

4. Écrire le bilan énergétique.

5. Utiliser ce dernier pour montrer que l'équation de mouvement pour β est donnée par
$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \sin\beta = 0\,, \tag{1}$$
et déterminer Ω.

6. Établir la fréquence d'oscillations de faible amplitude du disque autour de $\beta = 0$.

7. Retrouver l'equation de mouvement pour β à partir du théorème du moment cinétique appliqué en un point de contact I_1 en mouvement. Il est conseillé de travailler dans les référentiel galiléen $R = (O, x, y, z)$ et de suivre les étapes suivantes :

   (a) Écrire le théorème du moment cinétique appliqué en point en mouvement I_1 de manière générale.

   (b) Utiliser le théorème de Koenig pour trouver $\mathbf{L}_{I_1/R}$ à partir de $\mathbf{L}_{C_D/R} = \mathbf{L}_{C_D/R^*}$.

   (c) Calculer le moment des forces appliqué au point de contact I_1 mobile.