**CONTRÔLE TERMINAL DE
MÉTHODES ANALYTIQUES POUR LA PHYSIQUE**
Vendredi 4 juillet 2008, 10h00 à 12h00, durée : 2 heures

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Le sujet comporte **deux** pages. Les trois exercices sont indépendants.

*

QUESTION DE COURS

Soit f une fonction T -périodique où $T > 0$. Donner le développement en série de Fourier réelle de f .

*

EXERCICE 1

Soit $V \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$x^2 \psi''(x) + 5x \psi'(x) + 4\psi(x) = 0. \quad (1)$$

- 1) Chercher une première solution de (1) sous la forme $x \mapsto x^\alpha$.
- 2) Rappeler sans démonstration l'équation différentielle vérifiée par le Wronskien W de (1) et la résoudre avec la condition initiale $W(1) = 1$.
- 3) À l'aide du Wronskien déterminé en 2), trouver une deuxième solution de (1).
- 4) Dédurre des questions 1) et 3) l'expression de la solution générale de (1).

*

TSVP

EXERCICE 2

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et muni du produit scalaire habituel, $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + yy' + zz'$.

Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle est cette matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ (avec comme bases de départ et d'arrivée $\mathcal{B}$).

- 1) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ exprimé dans $\mathcal{B}$. Quelle relation existe-il entre M , v et $\varphi(v)$? Déterminer $\varphi(e_j)$, $j = 1, 2, 3$.
- 2) Déterminer le noyau de φ .
- 3) Déterminer les valeurs propres de φ .
- 4) En déduire que M est diagonalisable et la diagonaliser.
- 5) Utiliser le résultat de la diagonalisation de M pour calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 6) Soit V l'ensemble défini par $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ x + y - z = 0 \text{ et } x - z = 0 \right\}$.
 - a) Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.
 - b) Soit P un endomorphisme du $\mathbb{R}^3$. Rappeler les deux propriétés que P doit vérifier pour qu'on puisse dire que P est un projecteur orthogonal.
 - c) Déterminer le projecteur orthogonal sur V et vérifier que les deux propriétés de la question précédente sont bien vérifiées. Donner aussi la représentation matricielle de ce projecteur avec comme bases de départ et d'arrivée $\mathcal{B}$.

*

EXERCICE 3

- 1) Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{R}$ les deux séries numériques :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2q)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} \right)^q$$

convergent-elles ?

- 2) Rappeler sans démonstration le développement en série entière ainsi que le rayon de convergence de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$. En déduire que la fonction $x \mapsto -\frac{\ln(1 - x)}{x}$ a pour développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$, et préciser son rayon de convergence.
- 3) A l'aide de la question 2), calculer le rayon de convergence et la fonction qui a le développement en série entière suivant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n.$$