

ELECTROMAGNETISME

EXAMEN TERMINAL

Deuxième session

Durée : 2 h

I. Cours

1. Relation de Maxwell-Faraday : formes locale et intégrale.
2. Définir le vecteur de Poynting.

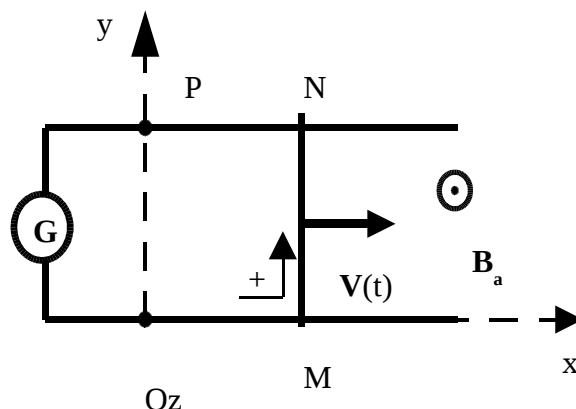
II. Barreau glissant sur des rails

Un barreau conducteur MN , placé perpendiculairement à deux longs rails conducteurs, parallèles et distants de L , peut glisser sans frottements sur ceux-ci. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\mathbf{B}_a = B\mathbf{e}_z$ ($B > 0$), perpendiculaire au plan des rails (voir figure 1). Les extrémités O et P des rails sont connectées à un galvanomètre G de résistance R . On négligera la résistance des rails et du barreau devant R , ainsi que le phénomène d'auto-induction devant celui d'induction dû à $\mathbf{B}_a$.

A l'instant $t=0$, on communique au barreau occupant la position initiale $x(0)=0$ une vitesse initiale $\mathbf{v}(0)=v_0\mathbf{e}_x$ ($v_0 > 0$).

- 1- Calculer le champ électromoteur à l'instant t en un point du barreau animé de la vitesse $\mathbf{v}(t)$.
- 2- En déduire l'expression de la f.é.m. $e(t)$ induite à l'instant t dans le circuit fermé comprenant le barreau mobile.
- 3- Retrouver ce résultat à partir du flux coupé, puis de la loi intégrale de Maxwell-Faraday.
- 4- Proposer un schéma électrique équivalent au circuit. En déduire l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant induit dans le circuit, comptée algébriquement selon le sens indiqué sur la figure. Montrer que le sens de circulation du courant est conforme à la loi de Lenz.
- 5- Calculer la force de Laplace agissant sur le barreau et montrer qu'elle agit sur ce dernier comme un frein électromagnétique.

Figure 1



I. Effet de peau à la surface d'un bon conducteur

On considère un conducteur qui occupe l'espace $z > 0$ d'un référentiel Oxyz et qui est défini par ϵ_0 , μ_0 et sa conductivité γ . On étudie les conditions d'existence d'un champ électromagnétique sinusoïdal de pulsation ω tel que :

$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}(z) \exp(i\omega t)$ et $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}(z) \exp(i\omega t)$ où $\underline{\mathbf{E}}(z)$ et $\underline{\mathbf{B}}(z)$ ont des composantes complexes.

On admet que $\gamma \gg \epsilon_0 \omega$.

1. Vérifier que les équations de Maxwell en représentation complexe peuvent s'écrire :

$$(1) \quad \text{rot } \underline{\mathbf{E}}(z) = -i \omega \underline{\mathbf{B}}(z)$$

$$(2) \quad \text{div } \underline{\mathbf{E}}(z) = 0$$

$$(3) \quad \text{div } \underline{\mathbf{B}}(z) = 0$$

$$(4) \quad \text{rot } \underline{\mathbf{B}}(z) = \mu_0 (\gamma + i \epsilon_0 \omega) \underline{\mathbf{E}}(z)$$

Etablir les équations différentielles vérifiées par $\underline{\mathbf{E}}(z)$ et $\underline{\mathbf{B}}(z)$. On posera $\delta = (2 / \mu_0 \omega \gamma)^{1/2}$.

On remarquera que $\underline{\mathbf{B}}(z)$ s'élimine entre (1) et (4) en utilisant l'identité :

$$\text{rot} (\text{rot} (\underline{\mathbf{E}}(z))) = \text{grad} (\text{div } \underline{\mathbf{E}}(z)) - \Delta (\underline{\mathbf{E}}(z)).$$

2. Quelle est la solution pour $\underline{\mathbf{B}}(z)$ en admettant que le champ magnétique doit rester fini dans tout l'espace.
3. On admet maintenant que $\underline{\mathbf{B}}$ est porté par Oy : $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}(z) \mathbf{e}_y \exp(i\omega t)$. Donner l'expression de $\underline{\mathbf{B}}$ en fonction de ω , t , z , δ , $\mathbf{e}_y$ et $\underline{\mathbf{B}}(0)$, puis l'expression de $\underline{\mathbf{B}}$ en notation réelle.
4. Exprimer le champ électrique $\underline{\mathbf{E}}$ en fonction de $\underline{\mathbf{B}}(0)$, z , γ , et δ . Donner l'expression de $\underline{\mathbf{E}}$ en notation réelle.
5. On considère un cylindre d'axe Oz. On appelle S la section du cylindre appartenant au plan xOy. Calculer la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers S en fonction de δ , γ , S, μ_0 et $|\underline{\mathbf{B}}(0)|^2$. Que représente cette quantité ?

