UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - LICENCE DE PHYSIQUE
Deuxième année

Mécanique et Applications à l'Astrophysique

24 Juin 2011, 8h30 Durée: 1h30

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes sans capacité de communication sont autorisées.

NB : les vecteurs sont notés en gras.

Questions de cours :

1. Énoncer les lois de Coulomb du frottement.
2. Énoncer la loi fondamentale de la dynamique pour la quantité de mouvement pour un système ouvert avec échange de matière.

Problème : Voiture avec volant d'inertie

Un jouet d'enfant se compose d'une petite voiture actionnée par un volant d'inertie. Le volant d'inertie est couplé par un engrenage aux roues de la voiture. Il acquiert de l'énergie cinétique quand on pousse la voiture, et continue a propulser la voiture après. Nous allons étudier la dynamique de la voiture réduite à l'essentiel : quatre roues, le volant d'inertie, et la carrosserie. La masse et l'inertie de l'engrenage seront négligées. Dans un premier temps nous étudions une seule roue de la voiture.

Partie I : Une seule roue

1. Une roue de voiture assimilable à un disque cylindrique homogène, de masse M_r et de rayon R_r, est mobile sur un axe horizontal (Ox) d'un repère orthonormé $(Oxyz)$ (cf. Fig.1). On note C son centre de masse. Calculer son moment d'inertie J par rapport à son axe (Cy) de révolution.
2. Montrer que le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe (O', y), où O' est le point de contact de la roue sur le sol est donné par $J' = (3/2)M_r\, R_r^2$.
3. La roue est propulsée par une force $\mathbf{F}_x = F_x\hat{e}_x$ orientée le long de l'axe (Ox) et appliquée au centre de masse de la roue. On suppose que la roue roule sans glisser.

   Exploiter la condition de roulement sans glissement pour déduire une relation entre la vitesse v_x du centre de masse C de la roue, sa vitesse angulaire ω et le rayon R_r de la roue.
4. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur le solide étudié. Expliciter les deux lois fondamentales de la dynamique qui régissent le mouvement de la roue : l'une

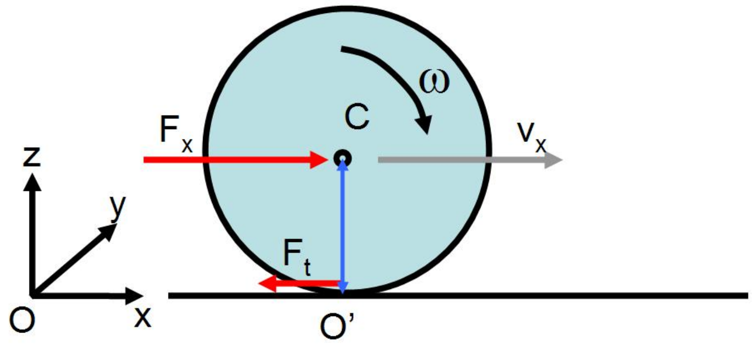

Figure 1: Une roue de rayon R_r roulant sans glisser en direction x sous l'influence d'une force F_x agissant sur son centre de masse C.

concerne la quantité de mouvement totale de la roue et l'autre , le moment cinétique par rapport au point de contact O'.

5. Appliquer le théorème du moment cinétique en O' pour en déduire une équation de mouvement pour la vitesse angulaire ω de la roue.

6. Montrer que le moment en O' des composantes tangentielle et normale de la réaction est nul. En déduire, en appliquant le théorème du moment cinétique la relation différentielle suivante :
$$\frac{dv_x}{dt} = f\frac{F_x}{M_r}\,, \tag{1}$$
où f est un facteur numérique à déterminer.

7. Une deuxième façon de trouver l'équation (1) utilise le théorème du centre d'inertie (loi fondamentale de la dynamique appliqué en C). Pour cela, on a besoin de connaître la composante tangentielle de la réaction du sol $\mathbf{F}_t = -F_t\hat{e}_x$: On applique d'abord le théorème du moment cinétique au centre de masse C de la roue. Montrer que ceci mène à
$$F_t = \frac{1}{2}M_rR_r\frac{d\omega}{dt}\,. \tag{2}$$

8. En prenant en compte toutes les forces agissant sur la roue, montrer que le théorème du centre d'inertie mène à l'equation (1) avec le même facteur f.

9. Enfin, une troisième façon d'obtenir l'éq.(1) utilise la conservation d'énergie.
   (a) Établir que l'énergie cinétique de la roue prend la forme
   $$E_c = \frac{3}{4}M_rv_x^2. \tag{3}$$
   (b) Calculer la puissance de toutes les forces s'appliquant sur la roue.
   (c) En déduire l'équation (1).

Partie II : La voiture complète

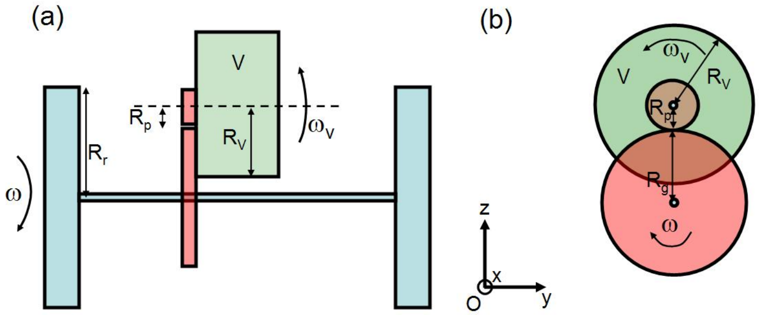

Figure 2: (a) Deux roues motrices (rayons R_r) à droite et a gauche, et l'engrenage consistant en un grand disque (rayon R_g) qui met en mouvement un petit disque (rayon R_p). Le petit disque est sur le mème axe que le volant d'inertie de rayon R_v et solidaire à celui-ci ; vue en direction $-x$ (b) vue de l'engrenage en direction y.

La Figure 2 montre le couplage entre le volant d'inertie (V) et les roues (R) par l'intermédiaire de deux disques de rayon R_p et R_g (avec $R_p < R_g$) roulant sans glissement l'un sur l'autre. Le disque de plus grand rayon est solidaire de l'axe des deux roues, alors que le disque le plus petit est solidaire du volant d'inertie, qui lui a un rayon R_v et une masse M_v. Il est aussi assimilé à un disque homogène. Nous supposons toujours que la voiture se déplace dans la direction x uniquement et que les roues roulent sans glisser au contact du sol.

1. Établir une relation simple entre la vitesse angulaire ω_v du volant d'inertie et la vitesse angulaire ω des roues.

2. En utilisant l'approche énergétique développée en I.9 et étendue à la voiture entière, comprenant les quatre roues, la carosserie (de masse M_c) et le volant d'inertie, montrer que la vitesse v_x de la voiture obéit à

$$M_{\text{eff}} \frac{dv_x}{dt} = F_x \,, \tag{4}$$

et déterminer la masse effective M_{eff}. On rappelle que l'engrenage (petit et grand disques intermédiaires) a une masse et un moment d'inertie négligeables.

3. Quelle est la nature du mouvement à partir du moment où la force $F_x = 0$?