Contrôle Terminal de Méthodes Analytiques pour la Physique

2ème session

Jeudi 30 juin 2011, 16h30 durée : 2 heures

⋆⋆⋆

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Lisez avec **soin** le texte d'une question avant de l'aborder. Les quatre exercices sont indépendants. Les téléphones portables doivent être eteints et ne pas figurer sur la table. Le sujet comporte **trois** pages.

⋆

Exercice 1

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel avec le produit scalaire canonique usuel :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

et la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) La matrice M possède une propriété permettant de déduire sans calcul qu'elle est diagonalisable. Quelle est cette propriété et que peut-on en déduire pour le produit scalaire entre deux vecteurs propres associés à différentes valeurs propres ?

2) Déterminer les valeurs propres de M.

3) Déterminer les sous-espaces propres de M. Vérifier la propriété pour les vecteurs propres trouvée dans la question 1).

4) On note P la matrice exprimant les vecteurs propres dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner une des expressions possibles de P et en calculer l'inverse. *Astuce :* Le calcul de l'inverse de P peut être simplifié en calculant d'abord $P^T P$ où P^T est la matrice transposée de P.

   Donner la matrice diagonale D associée à l'expression choisie ci-dessus pour P. Quelle relation existe-t-il entre M et D ? Comment appelle-t-on ce genre de relation ?

5) En utilisant la question 4), donner l'expression de M^n en fonction de P et D pour n entier naturel quelconque (on n'effectuera pas le calcul matriciel pour avoir M^n uniquement en fonction de n).

$\star$

EXERCICE 2 [*questions indépendantes*]

On veillera de préciser les manipulations appliquées aux déterminants, par exemple : "$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$" si on ajoute la colonne 2 à la colonne 1. Pour la notation du déterminant on pourra utiliser $\det(\cdots) = |\cdots|$ *si* $(\cdots)$ *représente une matrice à condition d'éviter de confusion avec les valeurs absolues.*

1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappeler l'expression du déterminant de A obtenue en développant par rapport à une ligne (ou une colonne) de A, en définissant la(les) notation(s) importante(s) dans ce développement.

2) Déterminer le réel t tel que

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & t \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 10$$

3) Soit a, b et c trois scalaires quelconques. Calculer le déterminant Δ défini ci-dessous et l'écrire sous forme factorisée.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{pmatrix}.$$

4) Soit D_n le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(lR)$ dont les éléments non-nuls sont définis par $A_{i,i+1} = x$ et $A_{i+1,i} = i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et x est un nombre quelconque.
   - Calculer D_1 et D_2.
   - Établir la relation de récurrence $D_n = D_{n-2}$.
   - En déduire l'expression de D_n en fonction de n.

$\star$

EXERCICE 3

Soit $V \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$x^2\psi''(x) + 3\,x\,\psi'(x) + \psi(x) = 0. \tag{1}$$

1) Chercher une première solution de Eq.(1) sous la forme d'une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$.

2) Rappeler <u>sans démonstration</u>, l'équation différentielle vérifiée par le Wronskien W de Eq. (1) et la résoudre avec la condition initiale $W(1) = 1$.

3) A l'aide du Wronskien déterminé en 2), trouver une deuxième solution de Eq.(1).

4) Déduire des questions 1) et 3) l'expression de la solution générale de Eq.(1).

$\star$

<u>Exercice 4</u>

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ une fonction périodique de période T telle que $|f(t)|^2$ est intégrable sur l'intervalle $[0, T[$. Rappeler (sans démonstration) le développement de $f(t)$ en série de Fourier **réelle** et donner les expressions permettant de calculer les coefficients dans le développement de Fourier. Rappeler (sans démonstration) aussi la formule de Parseval que les coefficients doivent vérifier.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ la fonction périodique avec période 2 et définie par

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in [0, 1[\\ -2 & \text{si } t \in [1, 2[\end{cases} .$$

Calculer son développement en série de Fourier **réelle**.

3) En déduire du résultat de la derniere question les valeurs des deux sommes :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2m)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

$\star\star\star$