Examen final, session de juin 2011

Durée : 2 heures.
Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}.$$

a) Étudier la continuité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles de f en chaque point où elles existent.

c) Étudier la continuité des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, puis en $(0,0)$.

d) Étudier la différantiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

e) Calculer $d_{(1,0)}f(h_1,h_2)$.

Exercice 2. a) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin y.$$

b) Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin y?$$

c) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xe^y$.

Exercice 3. a) Soit $D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$. Calculer :

$$\iint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

b) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$. Calculer

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dxdy.$$

(*Ind.: On peut utiliser un changement de variables et passer en coordonnées polaires.*)

Exercice 4. Soit $a > 0$. On considère la courbe (arc de parabole) $\vec{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\vec{\gamma}(t) = (t,t^2)$. Soit Γ son image.

a) Calculer la longueur de la courbe $\vec{\gamma}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 1+x+\sqrt{y}$. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma f d\gamma$.

c) On considère le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma}\rangle$.

FIN