Licence de Physique
L2 Mention Physique
2L41PC1

Physique Quantique - 2ème session

Juin 2011 - durée 1h30

On considère une particule de masse m évoluant dans le puits de potentiel (dit “harmonique") suivant:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad \text{avec} \quad k > 0.$$

1 Etat possible d'énergie de la particule.

1. Donner l'expression $H(x,p)$ de l'énergie mécanique totale de la particule classique en fonction de sa position x et de sa quantité de mouvement p.
2. Donner l'expression de $\hat{H}$, opérateur Hamiltonien de la particule quantique associée.
3. Donner l'équation différentielle de la fonction d'onde $\phi(x)$ associée à la particule quantique lorsque son énergie est E.
4. Vérifier que $\phi_1(x) = Axe^{-\alpha x^2/2}$ ($\alpha > 0$) est un état propre d'énergie E_1 dont on déterminera α et E_1 en fonction de $\hbar$, m et k. On introduira $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, i.e. la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.
5. Préciser autant que possible la valeur de A. On la donnera en fonction de α.
6. Exprimer $\mathcal{P}(x, x+dx)$, probabilité de présence de la particule dans l'intervale $[x, x+dx]$ lorsque la particule est dans l'état $\phi_1(x)$. Qu'appelle-t-on densité de probabilité de présence de la particule au point x ? On appelle $\rho_1(x)$ cette densité de probabilité.
7. Donner l'expression de $< X >_1$, position moyenne de la particule en fonction de $\rho_1(x)$ ou de $\phi_1(x)$, puis la calculer.
8. Représenter schématiquement sur une même graphe la droite horizontale $y = E_1$, $V(x)$, $\phi_1(x)$ et $\rho_1(x)$. On prendra comme axe des abscisses, la droite $y = E_1$, pour représenter $\phi_1(x)$ et $\rho_1(x)$.
9. Donner l'expression, **sans la calculer**, de $\mathcal{P}_I$, probabilité de présence de la particule à l'extérieur de l'intervalle $[x_m, x_M]$, où x_m et x_M sont les limites des positions classiques possibles de la particule quand son énergie vaut E_1. Commentez cette probabilité.

2 Étude de l'évolution temporelle de la particule

Soit $\Psi(x,t)$ la fonction d'onde de la particule à un instant t quelconque.

1. Donner l'équation aux dérivées partielles régissant l'évolution temporelle de $\Psi(x,t)$.
2. Trouver l'équation différentielle que doit vérifier $C(t)$ pour que $\Psi(x,t) = C(t)\phi_1(x)$, où $\phi_1(x)$ est l'état propre de la partie 1, soit un état possible de la particule.
3. En déduire $C(t)$ à une constante multiplicative près.
4. Comment appelle-t-on un tel état et pourquoi ?

On rappelle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-u^2} du = 0$$