UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - LICENCE DE PHYSIQUE
Deuxième année

Mécanique et Applications à l'Astrophysique

25 Juin 2008, 8h Durée: 1:30h

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculatrices en accord avec les spécifications de l'Université sont autorisées.

Les parties I et II ne sont *pas indépendantes.* Resoudre d'abord la partie I. Différentes questions de cours sont dispersés dans le problème ; elles peuvent être traitées indépendamment des autres questions.

NB : les vecteurs sont notés en gras.

Partie : I Ballon de foot idéal

Un ballon de foot idéal peut être bien décrit par une sphère creuse de rayon R et masse M avec une distribution de masse uniforme à la surface de la sphère.

1. Où est le centre de masse B du ballon ?

2. Déterminer le moment d'inertie du ballon par rapport à un axe passant par B.

Dans le référentiel $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ attaché à un coin du terrain de foot, le mouvement du ballon est décrit par le vecteur vitesse de son centre de masse $\mathbf{v}_{B/\mathcal{R}}$, et par le vecteur-rotation $\mathbf{\Omega}$. On note $\mathbf{g}$ le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme et on considère le référentiel $\mathcal{R}$ comme galiléen.

3. **Question de cours :** Exprimer à l'aide du théorème de Koenig l'énergie cinétique totale $E_{k/\mathcal{R}}$ du ballon dans le référentiel $\mathcal{R}$.

4. **Question de cours :** Exprimer de même le moment cinétique total $\mathbf{L}_{O/\mathcal{R}}$ du ballon par rapport à l'origine O du repère $\mathcal{R}$.

5. Application numérique pour $E_{k/\mathcal{R}}$ et $L_{O/\mathcal{R}}$ avec les données du ballon "Jo'bulani", le ballon de la Coupe du Monde de foot actuel : R = 11cm, M=0.430kg. On supposera qu'un joueur lance le ballon sur une ligne droite à partir de l'origine O avec $v_{B/\mathcal{R}} = 30$m/s et que le ballon tourne avec $\Omega = 10\,$rd/s.
   Supposant que le joueur ait mangé un seul yaourt (80Kcal, 1 cal =4.2 J) avant le match, et ait un rendement énergétique de 25%, combien de coups de pied pourrait-il donner au ballon avec la vitesse et le vecteur rotation specifiés, avant d'épuiser l'énergie du yaourt consommé ?

Phases de mouvement avec frottement

On pose le ballon en rotation autour de son axe y (vecteur-rotation initial $\mathbf{\Omega}(0) = (0, \Omega_0, 0)$) avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_{B/\mathcal{R}}(0) = (v_0, 0, 0)$ sur un plan horizontal (voir figure). Le ballon subit donc une force de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement μ.

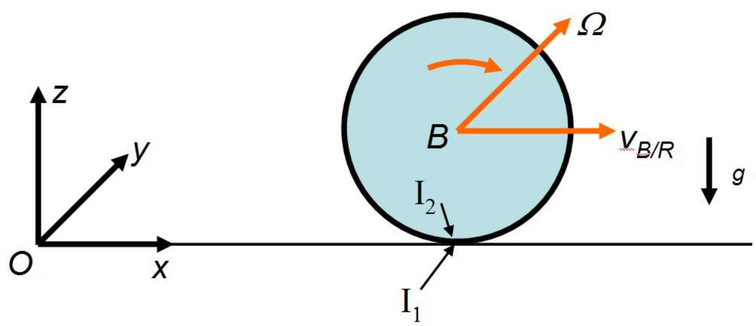

Figure 1:

6. Décrire, sans calcul et en maximum deux phrases, le comportement qualitatif attendu du ballon.

7. Définir la vitesse de glissement v_g du ballon par rapport au plan horizontal. Sachant que le ballon se déplace dans la direction x, exprimer ensuite v_g en fonction de la vitesse v_B (composante de $\mathbf{v}_{B/\mathcal{R}}$ suivant x) et de Ω.

Pour les questions suivantes, notamment pour déterminer la direction de la force de frottement, on supposera les valeurs initiales suivantes : $v_0 = 30$m/s, Ω_0=10/s.

8. Y a-t-il glissement du ballon à t=0 ? Si oui dans quel sens ?

9. Donner la force de frottement de Coulomb, en supposant que le ballon est dans le champ de pesanteur terrestre.

10. Montrer que l'équation pour l'accélération $\mathbf{a}_{B/\mathcal{R}}$ du centre de masse du ballon s'ecrit

$$\mathbf{a}_{B/\mathcal{R}} = -\mu g \mathbf{e}_x \,. \tag{1}$$

11. (a) Rappeler la définition du référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ du ballon.
(b) En appliquant le théorème du moment cinétique au ballon dans $\mathcal{R}^*$ montrer que

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2}\frac{\mu g}{R} \,. \tag{2}$$

12. Résoudre les deux équations du mouvement pour $\Omega(t)$ et la composante $v_B(t)$.

13. **Question de cours:** Quelle est la condition de roulement sans glissement ?

14. À quel instant t_r le glissement cesse-t-il ? Quelle est alors la vitesse finale du ballon ? Application numérique.

Partie II : Ballon de foot non-idéal

Un ballon de foot réel n'est, hélas, pas idéal. Notamment, un ballon de foot réel contient une valve V que nous allons approximer par un point matériel de masse m attaché à la surface du ballon (voir figure 2). La valve est dans le plan Oxz. Sa position est repérée par l'angle θ du vecteur $\overrightarrow{OV}$ par rapport à la verticale z.

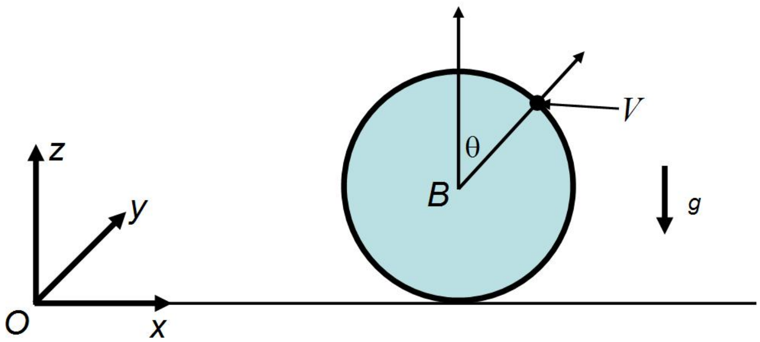

Figure 2:

15. Calculer l'énergie cinétique totale $E_{k/\mathcal{R}}$ de la valve en $\mathcal{R}$ dans le cas du roulement sans glissement du ballon avec vecteur rotation $\mathbf{\Omega} = (0, \Omega, 0)$.

16. Quelle est l'énergie potentielle de la valve en fonction de θ ?

17. Sans faire de calcul : Pour quelles valeurs de θ est-ce que l'énergie potentielle est minimale ?

18. Utiliser la conservation de l'énergie mécanique totale du ballon avec valve pour trouver l'équation de mouvement en θ du ballon avec valve dans le cas du roulement sans glissement.

19. Linéariser l'équation du mouvement autour de $\theta = \pi$ et trouver ainsi la fréquence des petites oscillations du ballon autour de la position d'équilibre stable. Application numérique pour $m = 43$g.