

Examen final, deuxième session, juin 2010

Durée : 2 heures.

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
- b) Calculer les dérivées partielles de f en chaque point où elles existent.
- c) Étudier la continuité des dérivées partielles sur leur domaine d'existence.
- d) Étudier la différentiabilité de f en $(0, 0)$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^3 + x^2 - 4xy + 3y^2$.

- a) Déterminer les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- b) Montrer que pour chaque y fixé, la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ atteint son minimum en $x = 2y$.
- c) Étudier le sens de variation de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(y) = f(2y, y)$.
- d) Montrer que pour tout $y > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x, y) \geq f(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.
- e) Montrer qu'il existe une suite $((a_n, b_n))_{n \geq 1}$ et une suite $((x_n, y_n))_{n \geq 1}$ telles que $(a_n, b_n) \longrightarrow (0, 0)$, $(x_n, y_n) \longrightarrow (0, 0)$ et

$$f(a_n, b_n) < f(0, 0) < f(x_n, y_n) \quad \text{pour tout } n.$$

Le point $(0, 0)$ est-il ou non un point de minimum ou de maximum local de f ?

Exercice 3. a) Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 2\}$. Calculer

$$\iint_{\Omega} (x + 2y) e^{-\frac{x}{2}} e^y dx dy.$$

b) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$. Calculer

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

(Ind.: on peut effectuer un changement de variables et passer en coordonnées polaires.)

Exercice 4. On considère la courbe $\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$. On note Γ l'image de $\vec{\gamma}$.

- a) Calculer la longueur de la courbe $\vec{\gamma}$.
- b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x + y$. Calculer $\int_{\Gamma} g d\vec{\gamma}$.
- c) On considère le champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (-y, x)$. Calculer $\int_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle$.

FIN