

EXAMEN DE
MÉTHODES ANALYTIQUES POUR LA PHYSIQUE
2^{ème} session

Mercredi 30 juin 2010, 14h15, durée : 2 heures

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Les téléphones portables doivent être éteints et ne pas figurer sur la table. Le sujet comporte **trois** pages. Les quatre exercices sont indépendants. ★

EXERCICE 1

Soit deux réels quelconques notés a et b . On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ a & 3 & b & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- a) Rappeler la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A définie en Eq.(1) et montrer qu'il ne dépend pas des paramètres a et b . Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité algébrique.
- b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la multiplicité algébrique des valeurs propres de B pour que B soit diagonalisable.
- c) Déterminer les vecteurs propres de la matrice A ainsi les espaces propres et leur dimension (en fonction des paramètres a et b). Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors les réels a et b vérifient une relation $a = C b$ avec la constante C à déterminer.

Dans toute la suite, on suppose $a = b = 0$, alors A diagonalisable.

- d) Déterminer une base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de vecteurs propres de la matrice A et donner l'expression de U , matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres. On désigne par D la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A comme éléments. Quelle relation existe-t-il entre A et D ? Comment appelle-t-on ce genre de relation?

Pour ce cas précis, il est possible de choisir la matrice U comme matrice orthogonale. Quelle est la raison pour ça? Donner un bon choix de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ telle que U est en effet orthogonale.

Désormais on suppose que U est orthogonale.

- e) Calculer U^{-1} , inverse de U .
- f) En utilisant les questions a), d) et e), calculer A^n pour n entier naturel quelconque.

★

EXERCICE 2

On veillera de préciser les manipulations appliquées aux déterminants, par exemple : “ $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ ” si on ajoute la colonne 2 à la colonne 1. Pour la notation du déterminant on pourra utiliser $\det(\dots) = |\dots|$ si $(\dots)$ représente une matrice à condition d’éviter toute confusion avec les valeurs absolues.

- a) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappeler l’expression du déterminant de A obtenue en développant par rapport à une ligne (ou une colonne) de A , en définissant la(les) notation(s) importante(s) dans ce développement.
- b) Déterminer le réel t tel que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = -10.$$

- c) Soit a , b et c trois scalaires quelconques. Calculer le déterminant Δ défini ci-dessous et l’écrire sous forme factorisée.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

- d) Soit x un scalaire quelconque et D_n le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{ij} = x$ si $|i - j| = 1$ et $A_{ij} = 0$ si $i = j$ ou $|i - j| \geq 2$.
- Calculer D_1 et D_2 .
 - Établir la relation de récurrence de D_n en fonction de D_{n-2} .
 - En déduire l’expression de D_n en fonction de n .

★

EXERCICE 3

Soit $V \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, l’espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. On considère l’équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$\psi''(x) + \frac{3}{x} \psi'(x) + \frac{1}{x^2} \psi(x) = 0. \quad (2)$$

- a) Chercher une première solution de Eq.(2) sous la forme d’une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$.
- b) Rappeler sans démonstration, l’équation différentielle vérifiée par le Wronskien W de Eq. (2) et la résoudre avec la condition initiale $W(1) = 1$.

- c) A l'aide du Wronskien déterminé en b), trouver une deuxième solution de Eq.(2).
 d) Dédire des questions a) et c) l'expression de la solution générale de Eq.(2).

★

EXERCICE 4

- a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ une fonction périodique de période T telle que $|f(t)|^2$ est intégrable sur l'intervalle $[0, T[$. Rappeler (sans démonstration) le développement de $f(t)$ en série de Fourier **complexe** et donner les expressions permettant de calculer les coefficients dans le développement de Fourier. Rappeler (sans démonstration) aussi la formule de Parseval que les coefficients doivent vérifier.
- b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ la fonction 2π -périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \pi[\\ 2\pi - t & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}.$$

Calculer son développement en série de Fourier **complexe**.

- c) En déduire du résultat de la dernière question les valeurs des deux sommes suivantes :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2m)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

★★★