

## CONTRÔLE PARTIEL DE MÉTHODES ANALYTIQUES POUR LA PHYSIQUE

Mardi 15 mars 2011, 13h00, durée : 1 heure

\*\*\*

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Le sujet comporte **deux** pages. Les trois exercices sont indépendants.

\*

### EXERCICE 1

On considère  $\mathbb{R}^3$  comme le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel muni de la somme usuelle entre deux vecteurs tridimensionnels et de la multiplication usuelle d'un vecteur tridimensionnel par un réel. Soit  $\varphi$  l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x + 2y + 4z \\ 2x + 2z \\ -4x - 2y - 5z \end{pmatrix} \end{array}$$

- 1) Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire.
- 2) Déterminer le noyau de  $\varphi$  et en donner la dimension.
- 3) Soit  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer  $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\varphi)$ , représentation matricielle de  $\varphi$  avec  $\mathcal{B}$  comme bases de départ et d'arrivée.
- 4) On considère  $W$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$W = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ M\mathbf{v} = -\mathbf{v} \right\},$$

où  $M$  est la matrice déterminée à la question 3).

Rappeler les propriétés que doit vérifier  $W$  pour qu'il soit un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Démontrer que  $W$  l'est effectivement.

- 5) Déterminer  $W$ . Quelle est sa dimension ? Donner une base de  $W$ .

\*

## EXERCICE 2

On considère les deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \mathbb{1}_3 - \mathbf{v} \mathbf{w}^t, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec  $x, y, z \in \mathbb{R}$  quelconques et  $\mathbb{1}_3$  désigne la matrice d'unité de taille  $3 \times 3$ .

- 1) Calculer  $B$  et le produit matriciel :  $AB$ .
- 2) En déduire la matrice inverse de  $A$ .

\*

## EXERCICE 3

On considère  $\mathbb{R}_n[X]$  le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  muni de l'addition entre deux polynômes habituelle et de la multiplication d'un polynôme par un réel habituelle. On définit l'application bilinéaire suivante :

$$\langle \dots | \dots \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \longmapsto \langle P | Q \rangle = \int_0^\infty \exp(-X) P(X) Q(X) dX .$$

- 1) Montrer que  $\langle \dots | \dots \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
[On admettra que pour tout polynôme  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  à valeurs non-négatives,  $\int_0^\infty \exp(-x) f(x) dx = 0$  implique que  $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .]
- 2) Calculer  $\langle X^p | X^m \rangle$  pour  $p, m \in \mathbb{N}$ .  
[On pourra utiliser sans démonstration :

$$\int_0^\infty \exp(-x) x^l dx = l! \quad , \quad l \in \mathbb{N} .]$$

- 3) Désormais on pose  $n = 2$  et on travaille dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
On considère  $\{1, X, X^2\}$ , base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Démontrer qu'elle n'est pas orthonormale ni orthogonale pour ce produit scalaire.
- 4) Calculer une base orthonormale  $\{P_0, P_1, P_2\}$  à partir de la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Pour  $P_2$  il suffit de fournir l'équation générale par laquelle  $P_2$  est déterminé sans finaliser le calcul.

\*\*\*