Contrôle Partiel de Méthodes Analytiques pour la Physique

Mardi 2 mars 2010, durée : 1 heure

⋆⋆⋆

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Le sujet comporte **deux** pages. Les trois exercices sont indépendants.

⋆

Exercice 1

On considère $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$.e.v. des polynômes de degré inférieur ou égal à n, muni de l'addition entre deux polynômes habituelle et de la multiplication d'un polynôme par un réel habituelle.

Soit $W = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(i) = 0\}$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et n un entier naturel.

1) Montrer que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour $n = 3$, trouver une base de W et en déduire que la dimension de W est 2.

⋆

Exercice 2

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Démontrer que $A^2 = A + 2\,\mathbb{1}_3$.

Pour les deux questions suivantes, on utilisera exclusivement le résultat de la question 1) et <u>aucun point</u> ne sera donné pour l'utilisation d'une méthode différente.

2) Calculer A^5.

3) Déterminer la matrice B telle que $AB = \mathbb{1}_3$.

⋆

Exercice 3

On considère $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$.e.v. des polynômes de degré inférieur ou égal à n, muni de l'addition entre deux polynômes habituelle et de la multiplication d'un polynôme par un réel habituelle. On définit l'application bilinéaire suivante :

$$\begin{array}{rccl} \langle \ldots | \ldots \rangle : & \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \langle P|Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2} P(X) Q(X) \mathrm{d}X \end{array} .$$

On admettra que si f est une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}$ et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

On donne, pour tout p entier naturel, les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} X^{2p+1} e^{-X^2} \mathrm{d}X &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} X^{2p} e^{-X^2} \mathrm{d}X &= \frac{(2p)!}{4^p \, p!} . \end{aligned}$$

1) Montrer que $\langle \ldots | \ldots \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2) On considère $\{1, X, X^2\}$, base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer qu'elle n'est pas orthonormale pour ce produit scalaire.
3) Construire une base orthonormale $\{P_0, P_1, P_2\}$ à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

   Montrer que les P_j ont pour coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Calculer la base duale de $\{P_0, P_1, P_2\}$ et en donner les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]^*$.

⋆⋆⋆