Contrôle Partiel de Méthodes Analytiques pour la Physique

Mardi 3 mars 2009, durée : 1 heure

⋆⋆⋆

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Le sujet comporte **deux** pages. Les trois exercices sont indépendants.

⋆

Exercice 1

On considère $\mathbb{R}^3$ comme le $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni de la somme usuelle entre deux vecteurs tridimensionnels et de la multiplication usuelle d'un vecteur tridimensionel par un réel. Soit φ l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+2z \\ -x-y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Démontrer que φ est une application linéaire.
2) Déterminer le noyau de φ et en donner la dimension.
3) Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$, représentation matricielle de φ avec $\mathcal{B}$ comme bases de départ et d'arrivée.
4) On considère W le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$W = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ M\mathbf{v} = 2\,\mathbf{v} \right\},$$

   où M est la matrice déterminée à la question 3).
   Rappeler les propriétés que doit vérifier W pour qu'il soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que W l'est effectivement.
5) Déterminer W. Quelle est sa dimension ? Donner une base de W.

⋆

Exercice 2

On considère les deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix}$$

avec $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques.

1) Calculer le produit matriciel : $A\,B$.

2) En déduire la matrice inverse de A.

$\star$

Exercice 3

On considère $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n muni de l'addition entre deux polynômes habituelle et de la multiplication d'un polynôme par un réel habituelle. On définit l'application bilinéaire suivante :

$$\begin{array}{llll} \langle \ldots | \ldots \rangle : & \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \langle P|Q \rangle = \int_0^2 P(X)Q(X)\mathrm{d}X \ . \end{array}$$

1) Montrer que $\langle \ldots | \ldots \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
[*On admettra que pour tout polynôme f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs non-négatives, $\int_0^2 f(x)dx = 0$ implique que $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*]

2) Calculer $\langle 1|X^m \rangle$ pour $m \in \mathbb{N}$ quelconque. En déduire $\langle X^p|X^m \rangle$ pour $p, m \in \mathbb{N}$.

3) Désormais on pose $n = 2$ et on travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$.
On considère $\{1, X, X^2\}$, base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Démontrer qu'elle n'est pas orthonormale ni orthogonale pour ce produit scalaire.

4) Calculer une base orthonormale $\{P_0, P_1, P_2\}$ à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Pour P_2 il suffit de fournir l'équation générale par laquelle P_2 est déterminé sans finaliser le calcul.

$\star\star\star$