Contrôle Partiel de Méthodes Analytiques pour la Physique

Vendredi 21 mars 2008, durée : 1 heure

⋆⋆⋆

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Le sujet comporte **deux** pages. Les trois exercices sont indépendants.

⋆

Exercice 1

Soit $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ \mathsf{Tr}A = 0 \quad \text{et} \quad A = A^t\}$.

1) Montrer que W est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Trouver une base de W et en déduire la dimension de W.

⋆

Exercice 2

On considère $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$.e.v. muni de l'addition entre deux polynômes habituelle et de la multiplication d'un polynôme par un réel habituelle. On définit l'application bilinéaire suivante :

$$\begin{array}{rccl} \langle \ldots | \ldots \rangle : & \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \langle P|Q \rangle = \int_0^1 X P(X) Q(X) \mathrm{d}X \end{array}.$$

On admettra que si f est une fonction positive et continue sur $[0; 1]$ et si $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[0; 1]$.

1) Montrer que $\langle \ldots | \ldots \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2) On considère $\{1, X, X^2\}$, base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Démontrer qu'elle n'est pas orthonormale pour ce produit scalaire.
3) Énoncer (on n'effectuera donc pas le calcul !) le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale $\{P_0, P_1, P_2\}$ à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4) Calculer une base orthonormale $\{P_0, P_1\}$ construite à partir de $\{1, X\}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

⋆

EXERCICE 3

Dans cet exercice, vous indiquerez explicitement les différentes opérations que vous aurez effectuées.

1) Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \quad .$$

2) Soit a, b et c trois scalaires quelconques. Calculer le déterminant d défini ci-dessous et montrer qu'il ne s'exprime qu'en fonction de $s = a + b + c$.

$$d = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad .$$

⋆⋆⋆