

Partiel du 4 novembre 2010

Durée: 1h30.

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

La qualité de la rédaction sera valorisée.

Exercice 1. a) Calculer $\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$.

b) Calculer la primitive $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{(2 + \sin x)(1 + \sin^2 x)} \, dx$.

Exercice 2. a) Calculer la primitive $\int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \, dx$.

b) Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_e^\infty \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \, dx$.

c) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(1 + \ln^2 n)}$.

Exercice 3. Étudier la convergence (et la convergence absolue si les termes n'ont pas un signe constant) des séries suivantes:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{2010}}{n!}$;

b) $\sum_{n \geq 1} n^{2010} x^n$, où $x \in]-1, 1[$;

c) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

Exercice 4.

a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction $f(x) = \arctan x$.
(Ind.: Calculer f' .)

b) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions $\arctan x$ et $e^{\arctan x}$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - (\cos x + \arctan x)}{x^2}$.

Exercice 5. Étudier l'existence des limites suivantes:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}; \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

(Ind.: a) On peut majorer $|x|$ et $|y|$ en termes de $\|(x, y)\|$.)

FIN