

Mécanique et Applications à l'Astrophysique

Durée 1h30

Aucun document n'est autorisé

A. Questions de cours (4 points)

- 1) Donner la définition du poids d'un corps de masse m situé à la surface de la Terre.
- 2) Enoncer le principe fondamental de la dynamique du point dans le référentiel terrestre en détaillant la signification de chaque terme.

B. Problème (16 points)

Mouvement d'un vaisseau spatial

Un vaisseau spatial de masse m se déplace dans le seul champ de gravitation d'une planète à symétrie sphérique de masse M et de rayon R , et centrée en un point O . On suppose que $M \gg m$ de sorte que le centre de gravité du système est assimilable à O . On note G la constante de gravitation universelle et on pose $K = GMm$.

- 1) Montrer que le mouvement du vaisseau est plan.
- 2) La position du vaisseau est repérée par ses coordonnées polaires (r, φ) dans le plan de la trajectoire.
 - a) Exprimer la vitesse $\vec{v}$ du vaisseau en fonction de r , $\dot{r}$ et $\dot{\varphi}$.
 - b) Exprimer le module du moment cinétique L en fonction de m , r et $\dot{\varphi}$. On note par la suite $C = L/m$.
 - c) On pose $u = 1/r$, montrer que

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]$$

- 3) La trajectoire du vaisseau est une conique de foyer O d'équation

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

où p et e sont deux constantes positives.

- a) Exprimer l'énergie cinétique E_c du vaisseau en fonction de m , C , p , e et φ .
 - b) Exprimer l'énergie potentielle E_p du vaisseau en fonction de K , p , e et φ .
 - c) Quelle propriété caractérise l'énergie mécanique E_m du vaisseau? Quelle relation doit-il alors exister entre m , C , K et p pour que cette propriété soit vérifiée? En déduire que
$$E_m = \frac{K}{2p}(e^2 - 1)$$
 - d) Discuter la nature de la trajectoire suivant le signe de l'énergie.
- 4) On s'intéresse dans cette question à une trajectoire *elliptique* de demi-grand axe a . On rappelle (formule vue en Td) que $a = p/(1 - e^2)$.

- a) Donner l'expression de E_m en fonction de K et a .
- b) En déduire qu'en chaque point de l'ellipse, position et vitesse sont liées par

$$v^2 = GM \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (1)$$

5) Application : voyage vers Mars

- a) On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié à la planète Mars (centre O et directions fixes). Le vaisseau possède une vitesse $v_0 = 1,9$ km/s par rapport à $\mathcal{R}$ alors qu'il se situe à très grande distance de la planète rouge (i.e. l'influence de Mars ne se fait pas encore sentir). A quoi se réduit l'énergie E_m ? Quelle est alors la nature de la trajectoire du vaisseau?
- b) Soit P le point de cette trajectoire le plus proche de la planète (cf. figure). On note r_P la distance OP et v_P la vitesse du vaisseau arrivant en P . Quelle relation simple existe-t-il entre v_0 , v_P et r_P ? Si $r_P = 2R$, calculer v_P numériquement.
- c) Une fois arrivés en P , les astronautes doivent changer d'orbite pour atteindre Mars. Pour ce faire, ils doivent modifier très rapidement leur vitesse (au moyen d'un moteur auxiliaire) pour que le vaisseau poursuive son mouvement sur l'orbite elliptique dessinée en pointillés sur la figure. Si tout se passe bien leur vaisseau doit donc toucher le sol martien en B . A l'aide de la formule (1) calculer, en fonction de G , M et R , la nouvelle vitesse v'_P que le vaisseau doit avoir en P pour changer d'orbite. Application numérique. Faut-il accélérer ou décélérer le vaisseau?
- d) Quelle est la vitesse en B par rapport à la vitesse en P ? Commenter.

Données numériques : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m.s}^{-1}$, $M = 6,4 \cdot 10^{23} \text{ kg}$, $R = 3400 \text{ km}$.

