Partiel du 28 octobre 2009

Durée: 1h30.

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

La qualité de la rédaction sera valorisée.

Exercice 1. On considère la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{3x - 5}{(x + 1)(x^2 + 2x + 5)}.$$

- a) Décomposer en fractions simples la fraction $f(x)$.
- b) Calculer les primitives de $f(x)$.

c) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin t - 5}{(\sin t + 1)(\sin^2 t + 2 \sin t + 5)} \cos t \, dt$.

Exercice 2. Étudier la convergence (et la convergence absolue si les termes n'ont pas un signe constant) des séries suivantes:

- a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \ln(1 + \sqrt{n})$;
- b) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$;
- c) $\sum_{n \geq 1} a_n$, où $a_n = n! \sin \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{1}{6} \cdot \dots \cdot \sin \frac{1}{2n}$.

Exercice 3. a) Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$.

b) Trouver le développement en série entière à l'origine des fonctions $\ln(1 - x)$ et $\ln(1 + x)$.

c) Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 4. a) Trouver le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$.

Exercice 5. Étudier l'existence des limites suivantes:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

FIN