

MATHEMATIQUES (2L32PC1E1)

Examen partiel – Jeudi 30 octobre
10h30 à 12h, aucun document n'est autorisé

Exercice I

Soit $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : (r, t) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g(r(x, y, z), t) = f(x, y, z, t)$, où $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Calculer $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right)$ en fonction de x et de r .

2. Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}.$$

3. Montrer que si f satisfait l'équation des ondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ alors g satisfait l'équation des ondes radiale

$$\frac{\partial^2 (rg)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rg)}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

4. Sachant que les solutions de l'équation $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$ sont données par $\Psi(u, t) = h(u + ct) + k(u - ct)$ où h et k sont \mathcal{C}^2 , donner les solutions de l'équation (1).

Exercice II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ -xy^2 & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Tracer les courbes de niveau de f et le graphe de $z = f(x, y)$.

3. Calculer toutes les dérivées partielles de f là où elles existent, et décider si f est de classe \mathcal{C}^1 , \mathcal{C}^2 , \mathcal{C}^3 , etc.

Exercice III

Montrer que l'ellipsoïde $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ ont le même plan tangent au point $(1, 1, 2)$.

Exercice IV

Trouver le volume de la plus large boîte parallélépipédique parallèle aux axes des coordonnées contenue dans l'ellipsoïde $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.