UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence Physique Chimie 2ème année — Année 2007/2008

MATHEMATIQUES
Examen partiel
Mercredi 7 Novembre

Durée 1 heure et demie, aucun document n'est autorisé

Exercice I.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

I.1 Etudier la limite de f en $(0,0)$ sur les droites $y = tx$ où $t \in \mathbb{R}$.

I.2 La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

Exercice II.

Soit la fonction à deux variables suivante

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(2x^2+3y^2)}$$

II.1 Chercher un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $(0,0)$ et déduire les dérivées partielles de f en $(0,0)$ jusqu'à l'ordre 2.

II.2 Déduire que $(0,0)$ est un point critique de f et déterminer sa nature.

Exercice III.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad (\mathcal{E})$$

avec $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \to f(x,y)$. On utilise le changement de variables suivant

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta) \qquad (1)$$

avec $r > 0$ et $\theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et on pose

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

III.1 Montrer que si f vérifie $(\mathcal{E})$ alors g satisfait

$$r\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1. \qquad (\mathcal{E}')$$

III.2 Résoudre l'équation $(\mathcal{E}')$.

III.3 Si (x,y) et (r,θ) vérifient la relation (1), montrer que $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ et déduire que $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \psi(\arctan(\dfrac{y}{x}))$ où $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque de classe C^1.