UNIVERSITE PAUL SABATIER **Mai 2010**
Licence 2ème année physique

ELECTROMAGNETISME

EXAMEN TERMINAL

Durée : 2 h

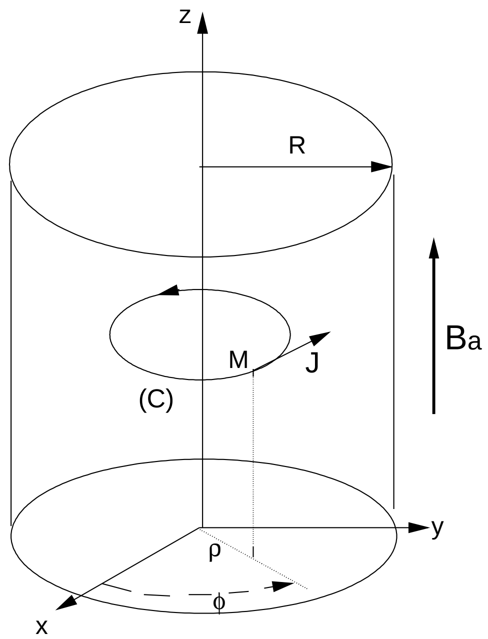
I. Question de Cours

1. Donner les équations de Maxwell et les relations de passage pour le champ (**E**,**B**) entre deux milieux, dans le cas le plus général, en indiquant les unités S.I. des grandeurs physiques.
2. Donner la relation entre la puissance volumique P, le champ électrique **E** et le courant volumique **J**. Préciser leurs unités S.I.

II. Courants de Foucault dans un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique alternatif dirigé selon son axe.

On considère un cylindre conducteur massif d'axe Oz , de rayon R et de conductivité γ, situé dans un champ magnétique extérieur uniforme $\mathbf{B}_a$ (t) = B_0 cos (ωt) $\mathbf{e}_z$ créé par des sources extérieures (voir figure).

1. La relation de Maxwell-Faraday relie $\mathbf{B}_a$ à un champ électrique $\mathbf{E}_1$. En utilisant des considérations de symétrie, expliquer pourquoi $\mathbf{E}_1$ est dirigé selon $\mathbf{e}_\phi$.
2. En utilisant un contour (C) de rayon ρ et d'axe Oz ,orienté suivant $\mathbf{e}_\phi$, écrire la relation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale et en déduire l'expression de $\mathbf{E}_1$ en fonction de ρ, B_0 , ω et t.
3. En déduire l'expression du courant volumique $\mathbf{J}_1$ en fonction de ρ, B_0, ω, t, et de la conductivité γ .
4. Calculer la puissance volumique P(t) dissipée par effet Joule dans le conducteur en fonction de ρ, B_0, ω et γ . En déduire sa valeur moyenne dans le temps $<P(t)>_t$.



5. On s'intéresse maintenant à la correction $\mathbf{B}_1$ apportée au champ magnétique $\mathbf{B}_a$ par la présence de $\mathbf{E}_1$. Calculer $\mathbf{B}_1$ (ρ) en intégrant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire de côtés Δz pour l'un et $\rho < R$ pour l'autre. On prendra $\mathbf{B}_1$ (ρ=0) = 0. Donner l'expression de $\mathbf{B}_1$ en fonction de ρ, ω, μ_0, γ et t.

III. **Propagation d'une onde cylindrique dans le vide.**

On considère une onde électromagnétique progressive, monochromatique, émise par des sources distribuées le long d'un axe Oz. On donne, en notation complexe, l'expression suivante pour le champ électrique de l'onde :

$$\underline{\mathbf{E}} = E(\rho) \times \exp\{i(\omega t - k\rho)\} \times \mathbf{e}_z \quad \text{avec } E(\rho) \text{ réel .}$$

La propagation a lieu dans le vide et le vecteur d'onde est radial : $\mathbf{k} = (\omega/c)\,\mathbf{e}_\rho$.

On utilise le système de coordonnées cylindriques.

1. Indiquer les invariances de $\underline{\mathbf{E}}$ par rapport aux trois coordonnées et donner l'expression de $\mathbf{rot}\underline{\mathbf{E}}$ en fonction de E(ρ), dE(ρ)/dρ , k , ω et t.

2. En intégrant l'équation locale de Maxwell-Faraday par rapport au temps, calculer $\underline{\mathbf{B}}$ en fonction de E(ρ), dE(ρ)/dρ , k , ρ, ω et t.

3. Donner l'expression de **E** et **B** en notation réelle. Montrer que **B** peut être écrit comme la somme de deux termes respectivement proportionnels à cos(ωt-kρ) et sin(ωt-kρ).

4. Calculer le vecteur de Poynting **R** en notation réelle en fonction de E(ρ), dE(ρ)/dρ , k, ω, ρ, μ_0 et t.

5. Calculer la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting précédent en fonction de E(ρ), μ_0 et c.

6. En déduire la puissance électromagnétique moyenne traversant un cylindre d'axe Oz, de hauteur unité et de rayon ρ. Sachant que cette puissance est constante et égale à P_0, déterminer E(ρ) en fonction de P_0 , ρ, μ_0 et c.

7. A quelle condition portant sur E(ρ) et dE(ρ)/dρ peut-on dire que l'onde est approximativement plane ? Quelle inégalité forte entre ρ et λ doit être alors vérifiée ?

On donne l'expression des opérateurs en coordonnées cylindriques pour un vecteur **V** *:*

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$$