Université Paul Sabatier

$2^{\text{ème}}$ année de Licence
2009/2010

Examen de Méthodes Analytiques pour la Physique

Vendredi 28 mai 2010, 9h00, durée : 2 heures

⋆⋆⋆

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Les téléphones portables doivent être eteints et ne pas figurer sur la table. Le sujet comporte **trois** pages. Les quatre exercices sont indépendants. ⋆

Exercice 1

Soit deux réels quelconques notés a et b. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -a & 2 & -b \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Rappeler la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A définie en Eq.(1) et montrer qu'il ne dépend pas des paramètres a et b. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité algébrique.

b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la multiplicité algébrique des valeurs propres de B pour que B soit diagonalisable.

c) Déterminer les vecteurs propres de la matrice A ainsi les espaces propres et leur dimensionalité (en fonction des paramètres a et b). Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors les réels a et b vérifient une relation $a = C\,b$ avec la constante C à déterminer.

Dans toute la suite, on suppose $a = b = 0$, alors A diagonalisable.

d) Déterminer une base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de vecteurs propres de la matrice A et donner l'expression de U, matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres. On désigne par D la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A comme éléments. Quelle relation existe-t-il entre A et D ? Comment appelle-t-on ce genre de relation.
Pour ce cas précis il est possible de choisir la matrice U comme matrice orthogonale. Quelle est la raison pour ca ? Donner un bon choix de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ telle que U est en effet orthogonale.

Désormais on suppose que U est orthogonale.

e) Calculer U^{-1}, inverse de U.

f) En utilisant les questions a), d) et e), calculer A^n pour n entier naturel quelconque.

$\star$

Exercice 2

On veillera de préciser les manipulations appliquées aux déterminants, par exemple : "$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$" si on ajoute la colonne 2 à la colonne 1. Pour la notation du déterminant on pourra utiliser $\det(\cdots) = |\cdots|$ *si* $(\cdots)$ *représente une matrice à condition d'éviter toute confusion avec les valeurs absolues.*

a) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappeler l'expression du déterminant de A obtenue en développant par rapport à une ligne (ou une colonne) de A, en définissant la(les) notation(s) importante(s) dans ce développement.

b) Déterminer le réel t tel que

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & t & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 5 \\ -6 & 6 & -4 & -3 \end{pmatrix} = -33.$$

c) Soit a, b et c trois scalaires quelconques. Calculer le déterminant Δ défini ci-dessous et montrer qu'il ne s'exprime qu'en fonction de $s = a + b + c$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

d) Soit D_n le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{ii} = 0$, $A_{ij} = 1$ si $i < j$ et $A_{ij} = -1$ si $i > j$ pour $i, j = 1, \ldots, n$.

- Calculer D_1 et D_2.
- Établir la relation de récurrence $D_n = D_{n-2}$. On pourra commencer par ajouter la $n$ième colonne à la première.
- En déduire l'expression de D_n en fonction de n.

$\star$

Exercice 3

Soit $V \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$\psi''(x) + \frac{2}{x}\psi'(x) + \frac{1}{4x^2}\psi(x) = 0. \tag{2}$$

a) Chercher une première solution de Eq.(2) sous la forme d'une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$.

b) Rappeler <u>sans démonstration</u>, l'équation différentielle vérifiée par le Wronskien W de Eq. (2) et la résoudre avec la condition initiale $W(1) = 1$.

c) A l'aide du Wronskien déterminé en b), trouver une deuxième solution de Eq.(2).

d) Déduire des questions a) et c) l'expression de la solution générale de Eq.(2).

$\star$

Exercice 4

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ une fonction périodique de période T telle que $|f(t)|^2$ est intégrable sur l'interval $[0, T[$. Rappeler (sans démonstration) le développement de $f(t)$ en série de Fourier réelle et donner les expressions permettant de calculer les coefficients dans le développement de Fourier. Rappeler (sans démonstration) aussi la formule de Parseval que les coéfficients doivent vérifier.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t$ si $t \in [0, 2\pi[$. Calculer son développement en série de Fourier réelle.

c) En déduire du résultat de la derniere question la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$\star\star\star$