CONTRÔLE TERMINAL DE MÉTHODES ANALYTIQUES POUR LA PHYSIQUE

1^{ère} session

Mercredi 25 mai 2011, 10h00, durée : 2 heures

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Cependant vous disposez à la fin du sujet d'un petit formulaire utile pour certaines questions. Lisez avec **soin** le texte d'une question avant de l'aborder. Les quatre exercices sont indépendants. Les téléphones portables doivent être éteints et ne pas figurer sur la table. Le sujet comporte **trois** pages.

*

EXERCICE 1

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel avec le produit scalaire canonique usuel :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

et la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) La matrice M possède une propriété permettant de déduire sans calcul qu'elle est diagonalisable. Quelle est cette propriété et que peut-on en déduire pour le produit scalaire entre deux vecteurs propres associés à différentes valeurs propres ?
- 2) Déterminer les valeurs propres de M .
- 3) Déterminer les sous-espaces propres de M . Vérifier la propriété pour les vecteurs propres trouvée dans la question 1).
- 4) On note P la matrice exprimant les vecteurs propres dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner une des expressions possibles de P et en calculer l'inverse. *Astuce* : Le calcul de l'inverse de P peut être simplifié en calculant d'abord $P^T P$ où P^T est la matrice transposée de P .
Donner la matrice diagonale D associée à l'expression choisie ci-dessus pour P . Quelle relation existe-t-il entre M et D ? Comment appelle-t-on ce genre de relation ?
- 5) En utilisant la question 4), donner l'expression de M^n en fonction de P et D pour n entier naturel quelconque (on n'effectuera pas le calcul matriciel pour avoir M^n uniquement en fonction de n).

★

EXERCICE 2 [questions indépendantes]

On veillera de préciser les manipulations appliquées aux déterminants, par exemple : “ $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ ” si on ajoute la colonne 2 à la colonne 1. Pour la notation du déterminant on pourra utiliser $\det(\dots) = |\dots|$ si $(\dots)$ représente une matrice à condition d’éviter de confusion avec les valeurs absolues.

- 1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappeler l’expression du déterminant de A obtenue en développant par rapport à une ligne (ou une colonne) de A , en définissant la(les) notation(s) importante(s) dans ce développement.
- 2) Déterminer le réel t tel que

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & t \end{pmatrix} = 12$$

- 3) Soit x, y et z trois scalaires quelconques. Calculer le déterminant Δ défini ci-dessous et l’écrire sous forme factorisée.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} x^3 & y^3 & z^3 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

★

EXERCICE 3

Soit $V \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, l’espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On considère l’équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$x^2 \psi''(x) - 3x \psi'(x) + 4\psi(x) = 0. \tag{1}$$

- 1) Chercher une première solution de Eq.(1) sous la forme d’une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$.
- 2) Rappeler sans démonstration, l’équation différentielle vérifiée par le Wronskien W de Eq. (1) et la résoudre avec la condition initiale $W(1) = 1$.
- 3) A l’aide du Wronskien déterminé en 2), trouver une deuxième solution de Eq.(1).
- 4) Dédire des questions 1) et 3) l’expression de la solution générale de Eq.(1).

★

EXERCICE 4

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ une fonction périodique de période T telle que $|f(t)|^2$ est intégrable sur l'intervalle $[0, T[$. Rappeler (sans démonstration) le développement de $f(t)$ en série de Fourier **complexe** et donner les expressions permettant de calculer les coefficients dans le développement de Fourier. Rappeler (sans démonstration) aussi la formule de Parseval que les coefficients doivent vérifier.
- 2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ la fonction 2π -périodique définie par

$$f(t) = \cosh(t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Calculer son développement en série de Fourier **complexe**.

- 3) En déduire du résultat de la dernière question la valeur de la somme : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.

FORMULAIRE

Les identités et propriétés suivantes peuvent être utilisées sans calcul ou vérification :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) ,$$

$$\cosh(t) = \operatorname{ch}(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) .$$