

CONTRÔLE TERMINAL DE MÉTHODES ANALYTIQUES POUR LA PHYSIQUE

2^{ème} session

Vendredi 5 juin 2009, 14h00, durée : 2 heures

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Les téléphones portables doivent être éteints et ne pas figurer sur la table. Le sujet comporte **trois** pages. Les quatre exercices sont indépendants.

*

EXERCICE 1

On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) La matrice M possède une propriété permettant de déduire sans calcul qu'elle est diagonalisable. Quelle est cette propriété et que peut-on en déduire pour le produit scalaire entre deux vecteurs propres associés à différentes valeurs propres ?
- 2) Déterminer les valeurs propres de M .
- 3) Déterminer les sous-espaces propres de M . Vérifier la propriété pour les vecteurs propres trouvée dans la question 1).
- 4) On note P la matrice exprimant les vecteurs propres dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner une des expressions possibles de P et en calculer l'inverse. *Astuce* : Le calcul de l'inverse de P peut être simplifié en calculant d'abord $P^T P$ ou P^T est la matrice transposée de P .
Donner la matrice diagonale D associée à l'expression choisie ci-dessus pour P . Quelle relation existe-t-il entre M et D ? Comment appelle-t-on ce genre de relation ?
- 5) En utilisant la question 4), donner l'expression de M^n en fonction de P et D pour n entier naturel quelconque (on n'effectuera pas le calcul matriciel pour avoir M^n uniquement en fonction de n).

*

EXERCICE 2 [questions indépendantes]

On veillera de préciser les manipulations appliquées aux déterminants, par exemple : “ $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ ” si on ajoute la colonne 2 à la colonne 1. Pour la notation du déterminant on pourra utiliser $\det(\dots) = |\dots|$ si $(\dots)$ représente une matrice à condition d’éviter de confusion avec les valeurs absolues.

- 1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappeler l’expression du déterminant de A obtenue en développant par rapport à une ligne (ou une colonne) de A , en définissant la(les) notation(s) importante(s) dans ce développement.
- 2) Déterminer le réel t tel que

$$\det \begin{pmatrix} 4 & t & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = -11$$

- 3) Soit x, y et z trois scalaires quelconques. Calculer le déterminant Δ défini ci-dessous et l’écrire sous forme factorisée.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

- 4) Soit x un scalaire quelconque et D_n le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{ij} = x$ si $|i - j| = 1$ et $A_{ij} = 0$ si $i = j$ ou $|i - j| \geq 2$.
 - a. Calculer D_1 et D_2 .
 - b. Établir la relation de récurrence de D_n en fonction de D_{n-2} .
 - c. En déduire l’expression de D_n en fonction de n .

★

EXERCICE 3

Soit $V \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, l’espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. On considère l’équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$x^2 \psi''(x) - 3x \psi'(x) + 4\psi(x) = 0. \quad (1)$$

- 1) Chercher une première solution de Eq.(1) sous la forme d’une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$.
- 2) Rappeler sans démonstration, l’équation différentielle vérifiée par le Wronskien W de Eq. (1) et la résoudre avec la condition initiale $W(1) = 1$.
- 3) A l’aide du Wronskien déterminé en 2), trouver une deuxième solution de Eq.(1).
- 4) Dédire des questions 1) et 3) l’expression de la solution générale de Eq.(1).

★

EXERCICE 4 [questions indépendantes]

- 1) Étudier la convergence ou non des séries de terme général u_n dans les cas suivants (on justifiera brièvement la réponse et on ne calculera pas la série en cas de convergence) :

$$u_n = \frac{0.000123}{n \cdot n^{-1/5}}, \quad u_n = (n+5)^{-1000/999}, \quad u_n = n^{42} \left(\frac{234}{235} \right)^n.$$

- 2) Donner une formule et les éventuelles conditions d'application de cette formule pour le calcul du rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique quelconque et n_0 un entier naturel quelconque.

- 3) Rappeler (sans calcul) le développement en série entière et le rayon de convergence de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$.

En déduire la convergence ou non des séries numériques suivantes et calculer leur valeur dans le cas où cela converge :

$$s_a = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - e^{1/3})^n}{n}, \quad s_b = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\ln 7)^n}{n!}, \quad s_c = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-7)^n}{6^n}.$$

(ici : $e = 2.71828\dots$ est le nombre d'Euler).
