Physique quantique

Mai 08

I - Une expérience simple de mesure de la polarisation d'un photon

(10 points)

Une onde lumineuse plane monochromatique polarisée est envoyée sur un analyseur A ; Oz désigne la direction de propagation de cette onde, $\mathbf{e}_p$ le vecteur unitaire qui décrit sa polarisation et I est son intensité lumineuse ; l'analyseur A transmet les polarisations parallèles à Ox ($\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_x$) et absorbe les polarisations parallèles à Oy ($\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_y$). Un détecteur est placé derrière l'analyseur A. Soit $\theta = (\mathbf{e}_x , \mathbf{e}_p)$ l'angle entre $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_p$.

La description classique de cette expérience (description valable pour une intensité lumineuse suffisamment grande) est la suivante : l'onde plane polarisée transmise par l'analyseur A est caractérisée par l'intensité lumineuse $I' = I \cos^2\theta$ (loi de Malus).

Dans la suite nous nous intéressons à ce qui va se passer au niveau quantique, c'est-à-dire lorsque I est suffisamment faible pour que les photons arrivent un à un sur l'analyseur (la polarisation d'un photon individuel est aléatoire).

1) Quels sont les résultats possibles de la mesure effectuée grâce à l'analyseur A ?

2) Quels sont les états propres de polarisation du photon associés aux résultats possibles de la mesure effectuée grâce à l'analyseur A ?

3) Ecrire l'état de polarisation du photon incident en fonction de θ et des états propres de la mesure effectuée grâce à l'analyseur A. Vérifier que l'état est normé.

4) Quelle est la probabilité associée à chacun des résultats possibles de la mesure effectuée grâce à l'analyseur A ? Quelle est la probabilité totale ?

5) Le résultat obtenu au niveau quantique est-il en accord avec la loi de Malus classique ? Justifier brièvement votre réponse.

IIa - Puits de potentiel unidimensionnel infiniment profond
(6 points)

On considère une particule de masse *m* piégée dans un puits de potentiel unidimensionnel infiniment profond et de largeur L . (cf schéma 1).

1) Ecrire l'équation de Schrödinger permettant de déterminer les fonctions d'ondes des états stationnaires de la particule, que l'on notera $\Phi_n(x)$, où n est un entier non nul.

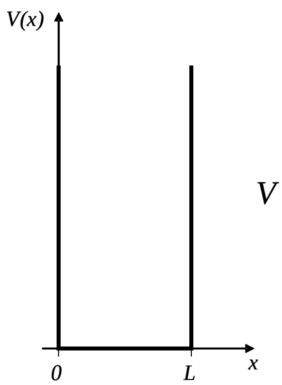
2) Déterminer la forme de la solution générale de cette équation. On pourra poser $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

3) En appliquant les conditions aux limites : $\Phi_n(0) = \Phi_n(L) = 0$, montrer que les fonctions $\Phi_n(x)$ sont de la forme : $\Phi_n(x) = A\sin(k_n x)$ où A est une constante.
On donnera l'expression de k_n en fonction de L et n.

4) Déterminer la constante A pour que les fonctions d'ondes $\Phi_n(x)$ soient normées.

5) A partir de l'équation de Schrödinger donner l'expression des énergies propres E_n associées aux fonctions $\Phi_n(x)$ en fonction de L et n.

6) Montrer que les fonctions $\Phi_n(x)$ sont orthogonales.



$$V(x) = \begin{cases} \infty \;\; pour \;\; x \le 0 \;et\; x \ge L \\ 0 \;\; pour \;\; 0 \le x \le L \end{cases}$$

Schéma 1

IIb - Puits de potentiel bidimensionnel infiniment profond : fil quantique.
(4 points)

La particule de masse *m* est maintenant piégée dans un puits de potentiel bidimensionnel. Ce type de potentiel peu être obtenu dans des structures appelées « fil quantique » (cf. schéma 2). Les mouvements de la particule suivant les directions ox et oy sont confinés dans un rectangle de cotés L_x et L_y , l'énergie potentielle est nulle à l'intérieur du rectangle et infinie à l'extérieur. Le mouvement de la particule le long de l'axe oz est libre. On s'intéresse aux états stationnaires dans le plan xoy. Les fonctions d'ondes des états stationnaires sont de la forme :

$\Psi(x,y) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)$ où k_x et k_y sont des réels et A est une constante.

1) Montrer à partir de l'équation de Schrödinger et des conditions aux limites : $\Psi(0,y) = \Psi(L_x, y)$ $\forall y$ et, $\Psi(x,0) = \Psi(x, L_y)$ $\forall x$, que les valeurs propres de l'énergie sont de la forme :

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2\pi^2}{L_y^2}\right)$$ où n_x et n_y sont des entiers non nuls.

2) Dans la suite : $L_x = L_y = L$. Donner les deux niveaux de plus basse énergie (niveau fondamental et premier niveau excité). On donnera les résultats en fonction de $E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}$.

3) Donner la dégénérescence de chacun de ces deux niveaux.

4) Application numérique : donner les valeurs limites de L pour que la différence d'énergie entre ces deux niveaux se situe dans la région visible du spectre (0.4µm < λ < 0.8µm).

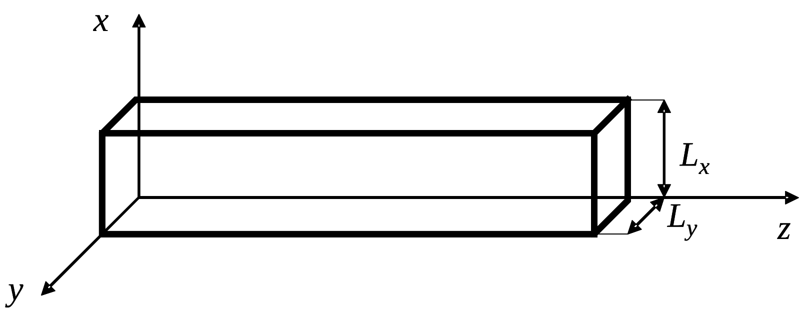


Schéma 2

<u>On donne</u> : m = 9,1.10^{-31} kg, c = 3.10^{8} m.s^{-1}, h = 6.63 10^{-34} J.s

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q) - \cos(p+q)\right]$$