Examen final, session de janvier 2011

Durée : 2 heures.
Le sujet comporte 2 pages.
Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Étudier la continuité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles de f en chaque point où elles existent.

c) Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

d) Étudier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$.

e) Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

f) Calculer $d_{(1,1)}f(h_1,h_2)$.

Exercice 2. Soit $r : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty[$ définie par $r(x_1,\ldots,x_N) = \|(x_1,\ldots,x_N)\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$. (En d'autres termes, $r(x) = \|x\|$ est la distance du point x à l'origine).

a) Montrer que r est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^N \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ et calculer $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^N \setminus \{(0,\ldots,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et *radiale*, c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction $g :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(r(x))$ pour tout x. On note

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}.$$

Montrer que g est de classe C^2 sur $]0,\infty[$ et exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ et Δf en termes de g et des dérivées de g (donner la formule la plus simple possible pour Δf).

c) Soit $f(x) = g(r(x))$ une fonction radiale, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^N \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ telle que $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{(0,\ldots,0)\}$. Montrer que $r^{N-1}g'(r)$ est constante sur $]0,\infty[$.

d) Déterminer toutes les fonctions f radiales, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^N \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 3. a) Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$. Calculer

$$\iint_\Omega xy \, dxdy.$$

b) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$. Calculer

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\, dxdy.$$

(*Ind.: On peut utiliser un changement de variables et passer en coordonnées polaires.*)

Exercice 4. Soit $a > 0$. On considère la courbe (hélice) $\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, at)$. Soit Γ son image.

a) Calculer la longueur de la courbe $\vec{\gamma}$.

b) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy + z$. Calculer $\int_\Gamma f d\gamma$.

c) On considère le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z^2)$. Calculer $\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle$.