

Examen final, session de janvier 2010

Durée : 2 heures.

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
- b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- c) Pour $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, calculer $d_{(2,0)}f(h_1, h_2)$.

Exercice 2. a) Trouver toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (s'il y en a) telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 5y + e^y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x + xe^y.$$

- b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

- c) Soit $D =]0, \infty[\times \mathbb{R}$. On définit $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = \frac{y}{x}$. Soit g une fonction de classe C^1 sur D .

On pose $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de dérivées partielles de g .

- d) Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur D qui vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } D.$$

(Ind.: Chercher f sous la forme $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ et utiliser la question précédente.)

Exercice 3. a) Soit $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 1\}$. Calculer :

$$\iiint_T \frac{dx \, dy \, dz}{(1 + x + 2y + 3z)^3}.$$

- b) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Calculer

$$\iint_D e^{x^2+y^2} \, dx \, dy.$$

(Ind.: On peut utiliser un changement de variable et passer en coordonnées polaires.)

Exercice 4. On considère la courbe $\vec{\gamma} : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

- a) Calculer la longueur de la courbe $\vec{\gamma}$.

- b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$. Calculer $\int_{\Gamma} f \, d\gamma$.

- c) On considère le champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, 5y)$. Calculer $\int_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle$.

FIN