

UNIVERSITE PAUL SABATIER – Licence de Physique 2^{ème} année

Mécanique et Applications à l'Astrophysique

Examen 4 janvier 2010 – Durée 2h

NB : les vecteurs sont notés en gras

A. Questions de cours

1. Définir la vitesse de glissement entre deux solides en contact.
2. Donner la condition de roulement sans glissement.
3. Application : cas d'une roue d'un véhicule de rayon r en contact avec le sol, qui tourne avec une vitesse angulaire ω ; en déduire la vitesse du centre de masse de la roue, dans le cas d'un roulement sans glissement.

B. Problème : Mouvement d'un système plan déformable entraîné par un moteur

Un système plan (S) est constitué de 4 tiges identiques homogènes (masse m , longueur ℓ) assemblées par des liaisons pivots parfaites pour former un losange plan déformable $OABA'$. Il est astreint à tourner autour d'un axe vertical ascendant (Oz) grâce à un moteur qui lui impose une vitesse angulaire de rotation constante Ω . L'extrémité supérieure B de (S) est reliée à un ressort de raideur $k = mg/\ell$ et de longueur à vide $\ell_0 = \ell/2$. L'autre extrémité du ressort F est fixée à un bâti fixe par une liaison telle que le ressort peut tourner librement sur lui-même autour de F , avec $\mathbf{OF}$ vertical et $OF = Cte = 9\ell/2$.

On associe au bâti le référentiel R ($0xyz$), (Oz) étant la verticale ascendante et à (S) le référentiel R' ($0x'y'z'$) avec $\mathbf{e}_y'$ parallèle à $\mathbf{AA}'$. On désigne par θ l'angle que fait l'une des tiges avec l'axe (Oz) = (Oz').

On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

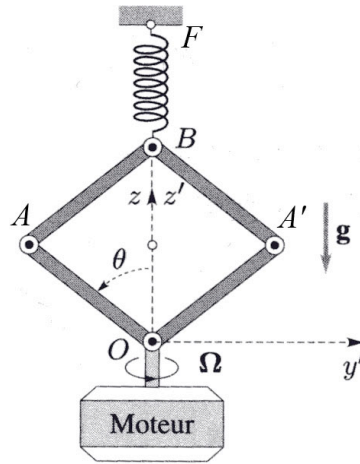


Figure : Solide déformable entraîné par un moteur

1. Pourquoi est-il préférable d'étudier le mouvement de (S) dans R' plutôt que dans R ?
2. Déterminer le nombre de degré de liberté.
3. En déduire alors que l'on peut étudier le mouvement de (S) par une méthode énergétique que l'on justifiera.
4. Déterminer l'énergie cinétique des tiges (OA) et (OA') dans R'.
5. Déterminer l'énergie cinétique des tiges (AB) et (A'B) dans R'.
6. En déduire que l'énergie cinétique totale de (S) s'écrit : $\varepsilon_k = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\theta}^2 (1 + 3 \sin^2 \theta)$
7. Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur ε_{pp} .
8. Déterminer l'énergie potentielle centrifuge ε_{pie} .
9. Montrer que l'énergie potentielle élastique ε_{pe} s'écrit : $\varepsilon_{pe} = 2k\ell^2(2 - \cos\theta)^2 + Cte$
10. En déduire que l'énergie potentielle du système peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_p = 2mg\ell \left(2\cos\theta + \frac{k\ell}{mg}(\cos^2\theta - 4\cos\theta) - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \sin^2\theta \right) + Cte$$

où ω_0 est une constante qu'on exprimera en fonction de g et ℓ .

11. En déduire une intégrale première du mouvement.
12. Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable $\theta_e \neq 0$ dans le cas où $k\ell = mg$. En utilisant un développement limité de ε_p autour de θ_e , en déduire les petits mouvements autour de θ_e .