UNIVERSITE PAUL SABATIER **Année 2008/2009**

Licence Physique Chimie 2ème année

Examen terminal, 1ère session

EXERCICE I. La résistance totale R de trois résistances R_1, R_2, R_3 montées en parallèle est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Si les résistances sont mesurées par $R_1 = 25\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $R_3 = 50\,\Omega$ avec 5% d'erreur maximale à chaque fois, quelle est l'erreur relative maximale de R ?

EXERCICE II. Soit S le solide décrit en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de manière suivante : S est borné supérieurement par la sphère $r^2 + z^2 = a^2$, où $a > 0$ est fixé, et inférieurement par le cône $z = \alpha r$, où $\alpha > 0$ est fixé. Dessiner S en coordonnées cartésiennes (x, y, z) et calculer son volume intérieur V en fonction de a et α.

EXERCICE III. Calculer l'intégrale curviligne de $\vec{F}(x, y) = (y\ln(x) + y(1 + y), x\ln(x) + 2yx)$ sur la portion de courbe C donnée par $r(t) = (e^{-t^2}, t),\ t \in [1, 2]$.

EXERCICE IV. Calculer l'intégrale curviligne

$$\oint_C (y + \arctan x)\,dx + (3x + \sin y)\,dy,$$

où C est la courbe fermée décrite par un arc de la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 4$.

EXERCICE V. Existe-t-il un champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = (yz, xyz, xy)$?

EXERCICE VI. Soit C le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et S la demi-sphère supérieure de rayon 1 et de centre O. On considère l'écoulement stationnaire dans C d'un fluide de masse volumique $\rho(x, y, z) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}\ Kg.m^{-3}$, dont le champ des vitesses est donné par

$$\overrightarrow{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \end{pmatrix}\ m.s^{-1}.$$

1. Montrer que l'écoulement conserve la masse, c'est-à-dire que $\mathrm{div}(\rho\overrightarrow{U}) = 0$.
2. Vérifier que $M(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}$, $u^2 + v^2 \leq 1$ est une paramétrisation de S, et calculer le débit de l'écoulement à travers S

$$Q = \iint_S \rho\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{n}\,dS.$$