Université Paul Sabatier — **Contrôle terminal**

Licence de Physique - 2ème année — 6 janvier 2009

Mécanique et Applications à l'Astrophysique

Durée 1h30

Aucun document n'est autorisé

A. Questions de cours

1) Écrire les deux équations différentielles vectorielles qui gouvernent la dynamique d'un solide indéformable.

2) Donner l'expression du moment cinétique d'un solide indéformable en point O fixe, qui fait apparaître le tenseur d'inertie.

3) En quoi consiste l'approximation gyroscopique ?

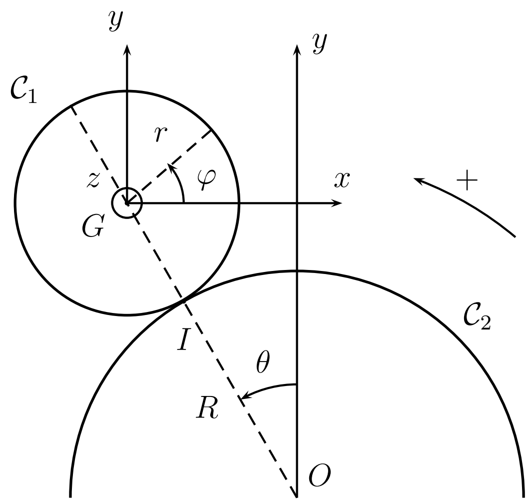
B. Problème

Mouvement d'un cylindre

On cherche à déterminer le mouvement d'un cylindre $\mathcal{C}_1$ de masse m, de rayon r et de hauteur h roulant sans glisser sur un autre cylindre $\mathcal{C}_2$ de rayon R immobile par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Initialement le cylindre $\mathcal{C}_1$ est posé au sommet du cylindre $\mathcal{C}_2$ avec une vitesse quasi nulle.

On repère la position du centre d'inertie G du cylindre mobile par l'angle θ que fait la droite OG avec la verticale Oy. On note par ailleurs φ l'angle de rotation propre du cylindre $\mathcal{C}_1$ (cf. figure ci-contre).

Les actions de contact exercées par $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_1$ sont modélisées par une unique force $\vec{R}$ appliquée au point de contact I. On décompose cette force en deux composantes normale et tangentielle au mouvement : $\vec{R} = T\vec{e}_\theta + N\vec{e}_r$.



1) Le cylindre $\mathcal{C}_1$ est supposé plein et homogène. Calculer son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution Gz.

2) Rappeler la définition de la vitesse de glissement de deux solides en contact. Exploiter la condition de roulement sans glissement pour trouver une relation simple entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.

3) Calculer l'énergie cinétique du cylindre $\mathcal{C}_1$ dans le référentiel du laboratoire, en fonction de m, r, R et $\dot{\theta}$.

4) Évaluer l'énergie potentielle de pesanteur du cylindre $\mathcal{C}_1$, en fonction de θ. On prendra comme origine de cette énergie $\theta = 0$.

5) Calculer la puissance des actions de contact entre les deux cylindres.
Montrer qu'on aboutit à une loi de conservation bien connue.
Utiliser cette loi de conservation et les conditions initiales pour vérifier la relation suivante :

$$\frac{3}{4}(R+r)\dot{\theta}^2 - g(1-\cos\theta) = 0 \qquad (1)$$

En déduire l'équation du mouvement *que l'on ne cherchera pas à résoudre.*

On pourra utiliser l'équation (1) pour la suite même si elle n'a pas été démontrée.

6) Calculer l'accélération *radiale* du centre de masse G en fonction de m, g et θ.

7) En appliquant un des théorèmes généraux à expliciter, montrer que la composante *normale* de la réaction du cylindre $\mathcal{C}_2$ sur le cylindre $\mathcal{C}_1$ s'écrit :

$$N = mg\left(\frac{7}{3}\cos\theta - \frac{4}{3}\right) \tag{2}$$

8) Représenter l'allure du graphe $N = f(\theta)$.
Que se passe-t-il lorsque $\theta = \theta_m$ tel que $\cos\theta_m = 4/7$? Qualitativement, quelle est la suite du mouvement de $\mathcal{C}_1$?

9) Quelle autre méthode aurait-on pu choisir pour trouver l'équation du mouvement de $\mathcal{C}_1$? L'expliciter en quelques phrases. On ne demande pas de calculs !