UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - LICENCE DE PHYSIQUE
Deuxième année

Mécanique et Applications à l'Astrophysique

Examen: 21 Janvier 2008. Durée: 1:30h

Aucun document est autorisé
Seules les calculettes U.P.S. sont autorisées

On rappelle que les correcteurs sont sensibles à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel, en aucun cas, ne devra être télégraphique. En outre, conformément à l'usage typographique internationale, les vecteurs sont représentés en gras.

A. Question de cours (4 points)

Aucune démonstration n'est demandée pour les questions de cours. Par contre, veillez à expliquer la signification de chaque quantité introduite.

1. Écrire le théorème pour le moment cinétique d'un solide en un point O' mobile. Que dévient ce théorème appliqué au centre de masse ? Commenter.
2. Comment s'écrit la loi fondamentale de la dynamique d'un système ouvert qui peut échanger de la matière avec son environnement ?

B. Problème: Disque tournant dans un four à micro-ondes (16 points)

Le plateau $\mathcal{D}$ sur lequel on met les plats dans un four micro-onde est un disque rond de masse m_D, d'épaisseur d, et de rayon r_D qui roule sans glisser sur trois billes identiques $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, et $\mathcal{B}_3$, de rayon r_B, enfilées sur trois tiges $\mathcal{T}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ à une distance constante r_1 de l'axe de rotation $\mathcal{T}$ du disque (voir Fig.1). L'axe de rotation $\mathcal{T}$ est orienté suivant l'axe $\hat{\mathbf{e}}_z$ ascendant et fixé au disque $\mathcal{D}$. Dans ce qui suit nous ne considérons que la bille B_1 enfilée sur $\mathcal{T}_1$. Nous supposerons que $\mathcal{T}_1$ peut tourner de façon indépendante par rapport à $\mathcal{T}$. La position de la tige $\mathcal{T}_1$ est repérée par l'angle ϕ_1.

Nous supposerons que le four à micro-ondes est lié à un réferentiel galiléen $R = (O, x, y, z)$, dont l'origine O se trouve à l'intersection de l'axe $\mathcal{T}$ et du plan sur lequel roulent les billes. On introduira également le référentiel orthonormé $R_1 = (O, x_1, y_1, z_1 = z)$, dont l'axe x_1 est confondu avec la tige $\mathcal{T}_1$, et qui est donc en rotation par rapport à R autour de l'axe $\hat{\mathbf{e}}_z$, ainsi que le référentiel barycentrique R^*_{B1} de la bille $\mathcal{B}_1$, dont l'origine est le centre de masse B_1 de la bille $\mathcal{B}_1$. On notera enfin ω_B la vitesse angulaire de $\mathcal{B}_1$ autour de $\mathcal{T}_1$.

Nous repérerons le mouvement du disque $\mathcal{D}$ par celui du rayon vecteur $\mathbf{OA}$, A étant un point du disque. On pose $\phi_2 = (\hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{OA})$. Nous négligerons les masses de toutes les tiges, de tous les axes, et de toutes les billes.

Cinématique

1. Calculer le moment d'inertie I_D du disque $\mathcal{D}$ (supposé plein et homogène) par rapport à l'axe Oz. L'exprimer en fonction de sa masse m_D et son rayon r_D. Pourquoi l'épaisseur d du disque n'intervient-elle pas dans cette expression?
2. Calculer la vitesse $\mathbf{v}_{K_1/R}$ du point de contact K_1 du disque $\mathcal{D}$. L'exprimer dans la base de R_1.

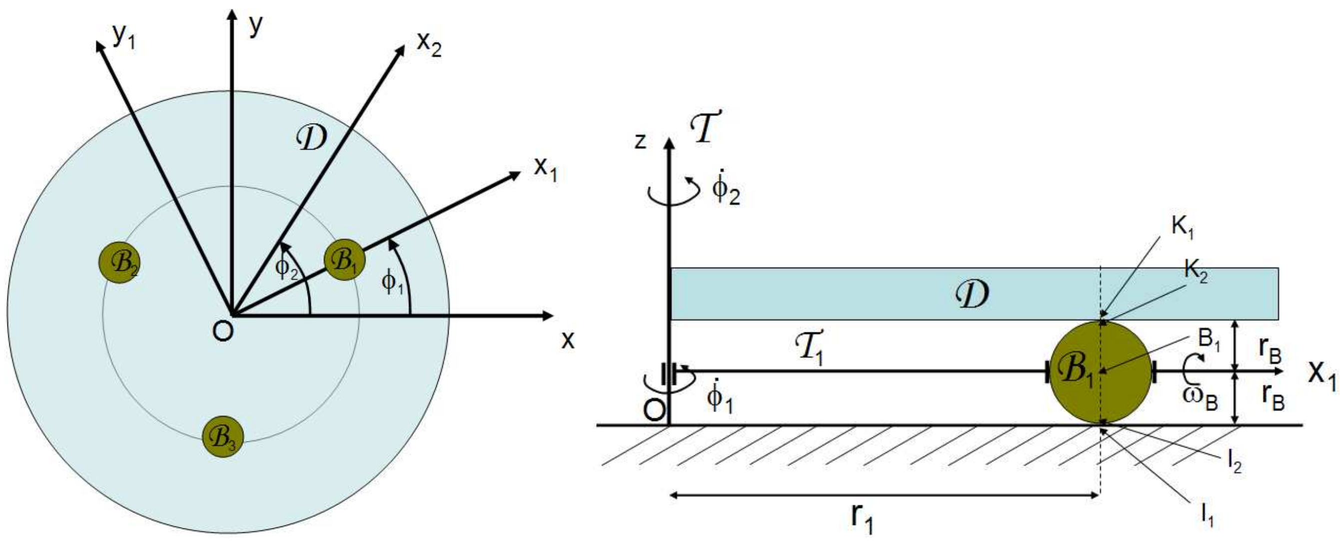

Figure 1: Disque vu du haut (gauche) et en coupe verticale (droite). Seulement la moitié du disque est répresentée a droite.

3. Calculer la vitesse $\mathbf{v}_{B_1/R}$ du centre de masse de la bille $\mathcal{B}_1$. L'exprimer dans la base de R_1.

4. Calculer la vitesse $\mathbf{v}_{K_2/R}$ du point de contact K_2 de $\mathcal{B}_1$. L'exprimer la base de R_1.

5. Faire de même pour la vitesse $\mathbf{v}_{I_2/R}$ du point de contact I_2 de $\mathcal{B}_1$.

6. Écrire les deux conditions de roulement sans glissement du plateau sur la bille et de la bille sur le fond du four micro-ondes. Montrer que l'on a

$$\omega_B = \dot{\phi}_1 \frac{r_1}{r_B} \,. \qquad (1)$$

Montrer que les vitesses angulaires $\dot{\phi}_1$ de la tige et $\dot{\phi}_2$ du disque sont reliées par,

$$2\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 \,. \qquad (2)$$

(Cette relation explique l'obversation que la tige $\mathcal{T}_1$ "traine" derrière le disque).

7. Combien de degrés de liberté indépendants le système possède-t-il ?

8. Calculer le moment cinétique L_O^D du disque en O dans le référentiel R.

9. Calculer l'énergie cinétique E_k^D du disque dans le référentiel R.

Dynamique

Un moteur exerce un moment externe $\Gamma_M \hat{\mathbf{e}}_z$ sur la tige $\mathcal{T}$, que celle–ci transmet au disque $\mathcal{D}$. Toutes les liaisons seront considerées comme parfaites, sauf la rotation de la bille $\mathcal{B}_1$ autour de sa tige $\mathcal{T}_1$, qui engendre une force de frottement de moment $\gamma\omega_B\hat{\mathbf{e}}_{x1}$, où γ est une constante. *(Rappel: On néglige la masse des billes !)*

1. Écrire le bilan des moments des forces sur la bille $\mathcal{B}$ en son centre de masse B_1, en tenant compte du couple des forces $\mathbf{F}_f = F_f\hat{\mathbf{e}}_{y1}$ que le disque exerce sur la bille en K_2, et de la reaction $\mathbf{R}_t = -\mathbf{F}_f$ du fond du four en I_2.

2. Puisque la masse de la bille est supposé nulle, le moment de forces doit s'annuller à tout instant. Montrer qu'en conséquence la force s'appliquant en point K_1 qui freine le disque s'écrit :

$$-\mathbf{F}_f = -\gamma \frac{r_1 \dot{\phi}_2}{4r_B^2} \hat{\mathbf{e}}_{y1} \tag{3}$$

3. Calculer le moment en point O de la force $-\mathbf{F}_f$ sur le disque.

4. Montrer que la projection du théorème du moment cinétique sur $\hat{\mathbf{e}}_z$, appliqué au disque, donne l'équation du mouvement suivant

$$\ddot{\phi}_2 + \tilde{\gamma}\dot{\phi}_2 = \Gamma_M / I_D\,, \tag{4}$$

   et déterminer la constante $\tilde{\gamma}$.

5. Trouver l'expression pour $\dot{\phi}_2(t)$ en prenant comme condition initiale $\dot{\phi}_2(0) = 0$.

6. Vers quoi tend la vitesse de rotation lorsque t tend vers ∞?

7. Si on prenait en compte les trois billes (et les frottements générés par leur mouvement) comment cette dernière expression changerait ? (Aucun calcul supplémentaire n'est demandé !)